

数列  $\{a_n\}$  は、 $a_1=1, a_{n+1}=\frac{7a_n-4}{9a_n-5}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) を満たす。

(1)  $a_{n+1}-\alpha=\frac{a_n-\alpha}{\beta(a_n-\alpha)+\gamma}$  を満たす定数  $\alpha, \beta, \gamma$  の値を求めよ。

(2) 一般項  $a_n$  を求めよ。

(12 滋賀大)

解説

$$\begin{aligned}(1) a_{n+1}-\alpha &= \frac{7a_n-4}{9a_n-5}-\alpha = \frac{7a_n-4-\alpha(9a_n-5)}{9a_n-5} = \frac{(7-9\alpha)a_n+5\alpha-4}{9a_n-5} \\ &= \frac{7-9\alpha}{9a_n-5} \left( a_n + \frac{5\alpha-4}{7-9\alpha} \right) \quad (\alpha \neq \frac{7}{9})\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{5\alpha-4}{7-9\alpha} = -\alpha$$

となる  $\alpha$  は

$$5\alpha-4=\alpha(9\alpha-7)$$

$$9\alpha^2-12\alpha+4=0$$

$$(3\alpha-2)^2=0 \quad \therefore \alpha=\frac{2}{3}$$

このとき

$$a_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{9a_n-5}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore a_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{9\left(a_n-\frac{2}{3}\right)+1}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

よって、 $\alpha=\frac{2}{3}, \beta=9, \gamma=1$

(2)  $b_n=a_n-\frac{2}{3}$  とおくと、 $b_1=a_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{9b_n+1}$$

両辺逆数をとって

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{9b_n+1}{b_n}=\frac{1}{b_n}+9$$

$c_n=\frac{1}{b_n}$  とおくと、 $c_1=\frac{1}{b_1}=3$

$$c_n=c_n+9$$

数列  $\{c_n\}$  は初項  $c_1=3$ 、公差 9 の等差数列より

$$c_n=3+(n-1)\cdot 9=9n-6$$

$$b_n = \frac{1}{c_n} = \frac{1}{9n-6}$$

$$a_n = b_n + \frac{2}{3} = \frac{1}{3(3n-2)} + \frac{2}{3} = \frac{1+2(3n-2)}{3(3n-2)} = \frac{2n-1}{3n-2}$$