

$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ の分母を有理化すると、 $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{\boxed{}}} - \sqrt{\sqrt[4]{\boxed{}}}}{\boxed{}}$ である。

また、 $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}} = \frac{x}{\boxed{}}$ である。

(2020 自治医大)

(解説)

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{3}}{2}$$

同様にして

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}} = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$$

より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{7}}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{x}{2} = 1 \end{aligned}$$