

$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ の分母を有理化すると、 $\frac{\sqrt{\text{ア}} \boxed{} - \sqrt{\text{イ}} \boxed{}}{\text{ウ} \boxed{}}$ である。

また、 $\frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} = \text{エ} \boxed{}$ である。

(2020 自治医大)

解説

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{\text{ア}}5 - \sqrt{\text{イ}}3}{\text{ウ}2}$$

同様にして

$$\frac{1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$$

より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{9}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} + \frac{3 - \sqrt{7}}{2} = \frac{3 - 1}{2} = \text{エ}1 \end{aligned}$$