整式 x^3+y^3 は，$(x+y)(x^2-xy+y^2)$ と表すことができる。これを利用すると，整式 x^3+2x^2+5x+4 は $(x^3+1)+(2x^2+5x+3)$ と表すことができるから，$(x+1)(x^2+ax+b)$ と因数分解できる。同様に整式 x^4-8x^2-9x-2 は $x(x^3+8)-(8x^2+17x+2)$ と表すことができるから，$(x+c)(x+d)(x^2+ex+f)$ と因数分解できる。ただし，a，b，c，d，e，f は整数で，$c<d$ である。

(1)　$a+b$ はいくらか。

(2)　$c+d+e+f$ はいくらか。

(3)　$x^2+ex+f=0$ を満たす x について，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ はいくらか。

(20　防衛医大)

解説

(1) x^3+2x^2+5x+4

$=(x^3+1)+(2x^2+5x+3)$

$=(x+1)(x^2-x+1)+(x+1)(2x+3)$

$=(x+1)\{(x^2-x+1)+(2x+3)\}$

$=(x+1)(x^2+x+4)$

よって

$a=1$，$b=4$

したがって

$a+b=5$

(2) x^4-8x^2-9x-2

$=x(x^3+8)-(8x^2+17x+2)$

$=x(x+2)(x^2-2x+4)-(x+2)(8x+1)$

$=(x+2)\{(x^3-2x^2+4x)-(8x+1)\}$

$=(x+2)(x^3-2x^2-4x-1)$

$=(x+2)(x+1)(x^2-3x-1)$　(因数定理)

$c<d$ より

$c=1$，$d=2$，$e=-3$，$f=-1$

よって

$c+d+e+f=-1$

(3) $x^2-3x-1=0$ を満たす x について

$x\neq 0$ であるから，両辺を x で割って

$x-3-\dfrac{1}{x}=0$　$\therefore\ x-\dfrac{1}{x}=3$

よって

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=3^2+2=11$