

整式 $x^4 + 9x^2 - 4x + 21$ は $(x^2 + a)^2 - (x + b)^2$ と表すことができるので、
 $(x^2 + x + c)(x^2 - dx + e)$ と因数分解できる。このとき、 a, b, c, d, e の値を求めよ。
(16 防衛医大)

解説

$$(x^2 + a)^2 - (x + b)^2 = x^4 + (2a - 1)x^2 - 2bx + a^2 - b^2$$

$x^4 + 9x^2 - 4x + 21 = x^4 + (2a - 1)x^2 - 2bx + a^2 - b^2$ が任意の x について成り立つとき

$$2a - 1 = 9 \cdots \textcircled{1}, -2b = -4 \cdots \textcircled{2}, a^2 - b^2 = 21 \cdots \textcircled{3}$$

①, ② より, $a = 5, b = 2$

これは ③ も満たす

よって

$$\begin{aligned} x^4 + 9x^2 - 4x + 21 &= (x^2 + 5)^2 - (x + 2)^2 \\ &= \{(x^2 + 5) + (x + 2)\}\{(x^2 + 5) - (x + 2)\} \\ &= (x^2 + x + 7)(x^2 - x + 3) \end{aligned}$$

したがって

$$c = 7, d = 1, e = 3$$