

(1) $x = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ のとき, $x^3 + y^3$ の値を求めよ。

(2) $(2+\sqrt{3})^3 + (2-\sqrt{3})^3$, $(2+\sqrt{3})^4 + (2-\sqrt{3})^4$ をそれぞれ計算せよ。

((1) 16 防衛大 (2) 12 名城大)

解説

(1) 分母の有理化をすると, $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ より

$$x + y = 4, xy = 1$$

よって

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 = 52$$

(2) $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ とおくと

$$x + y = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$$

$$xy = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

求める値は $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$ より

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$= 4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 = 52$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4^2 - 2 \cdot 1 = 14$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 = 14^2 - 2 \cdot 1^2 = 194$$