

(1) $x^2=5+2\sqrt{6}$, $y^2=5-2\sqrt{6}$ を満たす正の数 x , y に対して, $x+y$, x^3+y^3 の値を求めよ。

(2) $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $b=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ のとき, ab , $a+b$ の値を求めよ。

((1) 05 名城大 (2) 06 芝浦工業大)

解説

$$x^2+y^2=10,$$

$$x^2y^2=(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})=25-24=1$$

$$x>0, y>0 \text{ より, } xy=1$$

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy \text{ より}$$

$$(x+y)^2=10+2\times 1=12$$

$$x+y>0 \text{ より, } x+y=2\sqrt{3}$$

また

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= (2\sqrt{3})^3-3\times 1\times 2\sqrt{3} \\ &= 24\sqrt{3}-6\sqrt{3}=18\sqrt{3} \end{aligned}$$

別解

$$x>0 \text{ より, } x=\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$y>0 \text{ より, } y=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2} \text{ より}$$

$$x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$$

$$xy=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(2\sqrt{3})^3-3\times 1\times 2\sqrt{3}=24\sqrt{3}-6\sqrt{3}=18\sqrt{3}$$

$$(2) a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}, b=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} ab &= \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \\ &= \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} \\ &= \sqrt[3]{2^2-(\sqrt{5})^2} = \sqrt[3]{-1} = -1 \end{aligned}$$

$$a^3+b^3=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \text{ より}$$

$$t=a+b \text{ とおくと}$$

$$4=t^3+3t$$

$$t^3+3t-4=0$$

$$(t-1)(t^2+t+4)=0$$

$$t=a+b \text{ は実数より}$$

$$t=1 \quad \therefore a+b=1$$