

(1) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$ を計算せよ。

(2) $\frac{(\sqrt{3} + 1)^3 - (\sqrt{3} - 1)^3}{(\sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{3} - 1)^2}$ を計算せよ。

(3) $\frac{\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}}{\sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}}}$ を簡単にせよ。

((1) 11 佛教大 (2) 11 石巻専修大 (3) 00 大阪産業大)

解説

(1) $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ とおくと

$$a + b = 2\sqrt{3}, a - b = 2\sqrt{2}, ab = 1$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 12 - 2 = 10$$

求める値は $a^4 - b^4$ より

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) \\ &= 10 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 40\sqrt{6} \end{aligned}$$

(2) $a = \sqrt{3} + 1$, $b = \sqrt{3} - 1$ とおくと

$$\text{与式} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{(a - b)(a + b)} = \frac{(a + b)^2 - ab}{a + b}$$

ここで, $a + b = 2\sqrt{3}$, $ab = 2$ より

$$\text{与式} = \frac{12 - 2}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

(3) $a = 9 + 4\sqrt{5}$, $b = 9 - 4\sqrt{5}$ とおくと

$$\text{与式} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{a - b}$$

ここで, $a + b = 18$, $a - b = 8\sqrt{5}$, $ab = 1$ より

$$\text{与式} = \frac{18 + 2}{8\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$