

$(1+\sqrt{2})^7+(1-\sqrt{2})^7$ を計算せよ。

(12 国士館大)

解説

$a=1+\sqrt{2}$, $b=1-\sqrt{2}$ とおくと,

$$a+b=2, ab=-1$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=2^2-2\cdot(-1)=6$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=2^3-3\cdot(-1)\cdot 2=14$$

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=6^2-2\cdot(-1)^2=34$$

求める値は a^7+b^7 より

$$\begin{aligned} a^7+b^7 &= (a^3+b^3)(a^4+b^4)-(ab)^3(a+b) \\ &= 14\cdot 34-(-1)^3\cdot 2=478 \end{aligned}$$