

$A = x^3 + x^2 + x + 1$, $B = x^3 - x^2 + x - 1$ とする。このとき $A^3 - B^3$ の展開式における x^6 の係数を求めよ。

(2007 防衛医大)

解説

$x^2 + 1 = X$ とおくと

$$A = (x^3 + x) + (x^2 + 1) = xX + X = (x + 1)X$$

$$B = (x^3 + x) - (x^2 + 1) = xX - X = (x - 1)X$$

よって

$$\begin{aligned} A^3 - B^3 &= (x + 1)^3 X^3 - (x - 1)^3 X^3 \\ &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)X^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)X^3 \\ &= (6x^2 + 2)X^3 = (6x^2 + 2)(x^2 + 1)^3 \\ &= (6x^2 + 2)(x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) \end{aligned}$$

x^6 の項になる部分だけ取り出して

$$6x^2 \cdot 3x^4 + 2 \cdot x^6 = 20x^6$$

よって、 x^6 の係数は 20