

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)(x+11)(x+13)(x+15)$ を展開して得られる多項式について

- (1) x^7 の項の係数を求めよ。
- (2) x^6 の項の係数を求めよ。

(2012 近畿大)

(解説)

$$\begin{aligned}(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)(x+11)(x+13)(x+15) \\ = x^8 + (1+3+5+7+9+11+13+15)x^7 \\ + (1\cdot 3 + 1\cdot 5 + 1\cdot 7 + \dots + 13\cdot 15)x^6 + \dots\end{aligned}$$

(1) x^7 の項は、8つの()から x を7回、数字を1回かけてできる異なるものすべての和であるから、係数は

$$1+3+5+7+9+11+13+15 = \frac{1}{2} \cdot 8(1+15) = 64$$

(2) x^6 の項は、8つの()から x を6回、数字を2回かけてできる異なるものすべての和であるから、係数は

$$\begin{aligned}1\cdot 3 + 1\cdot 5 + 1\cdot 7 + \dots + 13\cdot 15 \\ = \frac{1}{2} \{1\cdot (1+3+5+\dots+15) + 3\cdot (1+3+5+\dots+15) + \dots + 15\cdot (1+3+5+\dots+15) \\ - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 15^2)\} \\ = \frac{1}{2} \{(1+3+5+\dots+15)^2 - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 15^2)\} \\ = \frac{1}{2} \{64^2 - (1+9+25+49+81+121+169+225)\} \\ = \frac{1}{2} (4096 - 680) = 1708\end{aligned}$$