

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)(x+11)(x+13)(x+15)$ を展開して得られる多項式について

(1) x^7 の項の係数を求めよ。

(2) x^6 の項の係数を求めよ。

(2012 近畿大)

解説

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)(x+11)(x+13)(x+15)$$

$$= x^8 + (1+3+5+7+9+11+13+15)x^7$$

$$+ (1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + \cdots + 13 \cdot 15)x^6 + \cdots$$

(1) x^7 の項は、8つの()から x を 7 回、数字を 1 回かけてできる異なるものすべての和であるから、係数は

$$1+3+5+7+9+11+13+15 = \frac{1}{2} \cdot 8(1+15) = 64$$

(2) x^6 の項は、8つの()から x を 6 回、数字を 2 回かけてできる異なるものすべての和であるから、係数は

$$1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + \cdots + 13 \cdot 15$$

$$= \frac{1}{2} \{1 \cdot (1+3+5+\cdots+15) + 3 \cdot (1+3+5+\cdots+15) + \cdots + 15 \cdot (1+3+5+\cdots+15)\}$$

$$- (1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 15^2) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (1+3+5+\cdots+15)^2 - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 15^2) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ 64^2 - (1+9+25+49+81+121+169+225) \}$$

$$= \frac{1}{2} (4096 - 680) = 1708$$