

1から10までの10個の整数から異なる2数を取り出し、それら2数の積を考える。考えられるすべての積 (${}_{10}C_2$ 個) の和はいくらか。

(12 防衛医大)

(解説)

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \cdots + 1 \cdot 10 = 1 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 10)$$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot 10 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 10)$$

.....

$$10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + \cdots + 10 \cdot 10 = 10 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 10)$$

これらをすべて足すと

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 10)(1 + 2 + 3 + \cdots + 10) \quad (\text{分配法則})$$

求める和は、ここから同じ数の積を除いて、

$a \cdot b$ と $b \cdot a$ は同じものであるから、2で割ればよい

よって

$$\frac{1}{2} \{ (1 + 2 + 3 + \cdots + 10)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2) \}$$

$$= \frac{1}{2} \left(55^2 - \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 \right) \quad (\text{シグマ公式利用})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 55 \cdot (55 - 7) = \frac{1}{2} \cdot 55 \cdot 48 = \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 24 = 1320$$