xy 平面上に 2 点 A$(0,\ 2)$，B$(2,\ 2)$ と円 C：$x^2+y^2=1$ がある。点 P が C 上を動くとき AP^2+BP^2 の最大値と最小値を求め，また，それらを与える P の座標を求めよ。

(15　学習院大)

(解説)

P は C 上を動くから

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta\quad (0\leqq\theta<2\pi)$$

とおける。このとき

$$\begin{aligned}AP^2+BP^2&=\cos^2\theta+(\sin\theta-2)^2+(\cos\theta-2)^2+(\sin\theta-2)^2\\&=-8\sin\theta-4\cos\theta+14\\&=-4(2\sin\theta+\cos\theta)+14\end{aligned}$$

$f(\theta)=2\sin\theta+\cos\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

$$=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，α は $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす角

$\sin(\theta+\alpha)=-1$ のとき AP^2+BP^2 は最大

最大値　$14+4\sqrt{5}$

このとき，$\theta=\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$ より P$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\sin(\theta+\alpha)=1$ のとき AP^2+BP^2 は最小

最小値　$14-4\sqrt{5}$

このとき，$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ より P$\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

別解 中線定理を利用

線分 AB の中点を M とすると，M$(1,\ 2)$

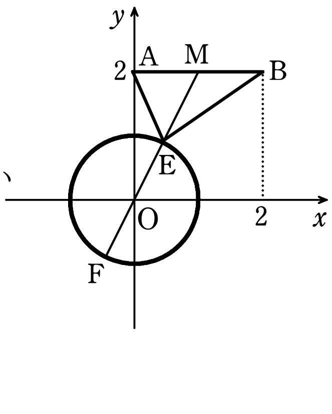
△PAB において，中線定理より

$$PA^2+PB^2=2(PM^2+AM^2)$$

AM は一定であるから，PM の最大，最小を考えればよい

直線 OM と円 C の交点を図のように E，F とすると

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ F\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$



P＝F のとき AP^2+BP^2 は最大　最大値 $14+4\sqrt{5}$

P＝E のとき AP^2+BP^2 は最小　最小値 $14-4\sqrt{5}$