数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_{n+1}=5-\dfrac{6}{a_n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_2 の値を求めよ。

(2)　$b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n の式で表せ。ただし，$a_n \neq 3$ である。

(3)　b_n を n の式で表せ。

(4)　a_n を n の式で表せ。

(20　東京電機大)

解説

(1) $a_2=5-\dfrac{6}{a_1}=-1$

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ とおくと，　$b_1=\dfrac{1}{a_1-3}=-\dfrac{1}{2}$

$$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}-3}=\frac{1}{\left(5-\dfrac{6}{a_n}\right)-3}=\frac{1}{2-\dfrac{6}{a_n}}=\frac{a_n}{2a_n-6}$$

$$=\frac{(a_n-3)+3}{2(a_n-3)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{a_n-3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}$$

よって

$$b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}$$

(3) $b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n+\dfrac{1}{2}$

$$b_{n+1}+1=\frac{3}{2}(b_n+1)$$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列より

$$b_n+1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1$$

(4) $a_n=\dfrac{1}{b_n}+3=\dfrac{2^n}{3^{n-1}-2^n}+3=\dfrac{2^n+3^n-3\cdot 2^n}{3^{n-1}-2^n}=\dfrac{3^n-2\cdot 2^n}{3^{n-1}-2^n}=\dfrac{3^n-2^{n+1}}{3^{n-1}-2^n}$