

$a_1=7, a_{n+1}=\frac{7a_n+3}{a_n+5}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) $b_n=a_n-k$ とおくとき, $b_{n+1}=\frac{\alpha b_n}{b_n+\beta}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) となるような定数 $k,$

α, β を求めよ. ただし $k>0$ とする.

(2) $c_n=\frac{1}{b_n}$ とおく. 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ. 更に, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(03 電気通信大)

解説

$$\begin{aligned} (1) a_{n+1}-k &= \frac{7a_n+3}{a_n+5}-k = \frac{7a_n+3-k(a_n+5)}{a_n+5} = \frac{(7-k)a_n+(3-5k)}{a_n+5} \\ &= \frac{7-k}{a_n+5} \left(a_n - \frac{5k-3}{7-k} \right) \quad (k \neq 7) \end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{5k-3}{7-k} = k$$

となる k は

$$5k-3=k(7-k)$$

$$k^2-2k-3=0$$

$$(k+1)(k-3)=0$$

$k>0$ より, $k=3$

このとき

$$a_{n+1}-3 = \frac{4}{(a_n-3)+8} (a_n-3)$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{4b_n}{b_n+8}$$

よって, $k=3, \alpha=4, \beta=8$

$$(2) b_{n+1} = \frac{4b_n}{b_n+8}$$

両辺逆数をとって

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{b_n+8}{4b_n}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2}{b_n} + \frac{1}{4}$$

$c_n = \frac{1}{b_n}$ とおくと, $b_1 = a_1 - 3 = 4, c_1 = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{4}$

$$c_{n+1} = 2c_n + \frac{1}{4}$$

$$c_{n+1} + \frac{1}{4} = 2\left(c_n + \frac{1}{4}\right)$$

数列 $\left\{c_n + \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $c_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, 公比 2 の等比数列より

$$c_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}$$

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{4} = \frac{2^n - 1}{4}$$

(3) (2)より

$$b_n = \frac{1}{c_n} = \frac{4}{2^n - 1}$$

$$a_n = b_n + 3 = \frac{4}{2^n - 1} + 3 = \frac{3 \cdot 2^n + 1}{2^n - 1}$$