三角形 ABC において，辺 BC を 3 等分する点 P，Q を BP＝PQ＝QC となるようにとる。このとき，次の関係式が成り立つことを証明せよ。

$$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3(\mathrm{AP}^2+2\mathrm{BP}^2)$$

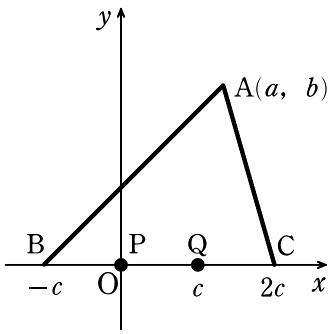
(18　福島大)

(解説)

直線 BC を x 軸，点 P を原点にとり

A$(a,\ b)$，B$(-c,\ 0)$，C$(2c,\ 0)$ ($b\fallingdotseq 0$，$c>0$) とおく

このとき



$$\begin{aligned}
&2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2\\
&=2\{(-c-a)^2+b^2\}+\{(2c-a)^2+b^2\}\\
&=2(a^2+2ac+c^2+b^2)+(4c^2-4ac+a^2+b^2)\\
&=3a^2+3b^2+6c^2\\
&=3(a^2+b^2)+6c^2\\
&=3\mathrm{AP}^2+6\mathrm{BP}^2\\
&=3(\mathrm{AP}^2+2\mathrm{BP}^2)
\end{aligned}$$