座標平面に点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ があり，等式 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ を満たすように点 P$(x,\ y)$ を動かす。線分 AP と BP について考える。

$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$y=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{オ}}$ をとり，

$x=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$，$y=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。

(14　東京理科大)

解説

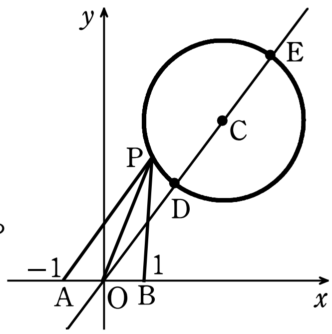
$C:x^2+y^2-6x-8y+21=0$

$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$

中心 C$(3,\ 4)$，半径 2 の円を表す

中線定理より

$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=2(\mathrm{OP}^2+\mathrm{OA}^2)=2\mathrm{OP}^2+2$



直線 OC と円 C の交点のうち，

点 O に近い方を D，遠い方を E とすると

$\mathrm{OD}=3$，$\mathrm{OE}=7$

D は OC を 3:2 に内分し，E は OC を 7:5 に外分するから

$\mathrm{D}\left(\dfrac{9}{5},\dfrac{12}{5}\right),\mathrm{E}\left(\dfrac{21}{5},\dfrac{28}{5}\right)$

よって，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ は

$x=\dfrac{{}^{\text{ア}}9}{{}^{\text{イ}}5}$，$y=\dfrac{{}^{\text{ウ}}12}{{}^{\text{エ}}5}$ のとき，最小値 $2\cdot3^2+2={}^{\text{オ}}20$ をとり，

$x=\dfrac{{}^{\text{カ}}21}{{}^{\text{キ}}5}$，$y=\dfrac{{}^{\text{ク}}28}{{}^{\text{ケ}}5}$ のとき，最大値 $2\cdot7^2+2={}^{\text{コ}}100$ をとる。