3 つの直線 $x+2y-4=0$，$2x-y-2=0$，$x-y+5=0$ によって作られる三角形を考える。

(1)　三角形の各頂点からの距離の 2 乗の和が最小になる点は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\right)$ である。

(2)　三角形の各辺からの距離の 2 乗の和が最小になる点は $\left(\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\right)$ である。

(16　慶応大)

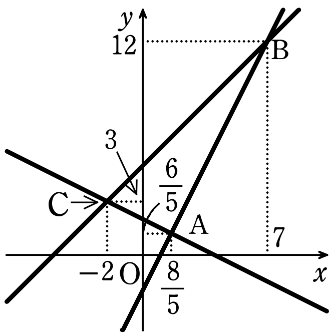
解説

$x+2y-4=0$ …①, $2x-y-2=0$ …②, $x-y+5=0$ … ③とする

①，② の交点を A，②，③ の交点を B，③，① の交点を C とすると

$$\mathrm{A}\left(\frac{8}{5},\ \frac{6}{5}\right),\ \mathrm{B}(7,\ 12),\ \mathrm{C}(-2,\ 3)$$

(1) 点 P$(a,\ b)$ と三角形の各頂点からの距離の 2 乗の和は

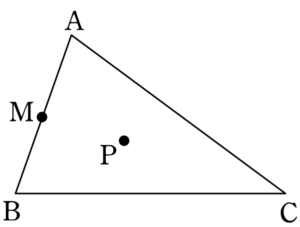


$$\begin{aligned}
&\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2\\
&=\left(a-\frac{8}{5}\right)^2+\left(b-\frac{6}{5}\right)^2+(a-7)^2+(b-12)^2\\
&\qquad+(a+2)^2+(b-3)^2\\
&=3a^2-\frac{66}{5}a+3b^2-\frac{162}{5}b+210\\
&=3\left(a-\frac{11}{5}\right)^2+3\left(b-\frac{27}{5}\right)^2+108
\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ は $a=\dfrac{11}{5}$，$b=\dfrac{27}{5}$ のとき最小となるから，求める点は

$$\left(\frac{^{\text{ア}}11}{_{\text{イ}}5},\ \frac{^{\text{ウ}}27}{_{\text{エ}}5}\right)$$

参考



この点は，実は △ABC の重心になります。

A と B の中点を M とすると，中線定理より

$$\begin{aligned}
\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2&=2(\mathrm{PM}^2+\mathrm{AM}^2)+\mathrm{CP}^2\\
&=2\mathrm{PM}^2+\mathrm{PC}^2+2\mathrm{AM}^2
\end{aligned}$$

MCを 1:2 に内分する点を N とすると

前出のスチュワートの定理より

$$\begin{aligned}
&=3(\mathrm{PN}^2+2\mathrm{MN}^2)+2\mathrm{AM}^2\\
&=3\mathrm{PN}^2+6\mathrm{MN}^2+2\mathrm{AM}^2
\end{aligned}$$

MN, AM は定数であるから，PN が最小のとき

$AP^2+BP^2+CP^2$ は最小となる

PN が最小となるのは P と N が一致するときで

N は M が AB の中点であり CM を 2:1 に内分する点より，△ABC の重心であるから

P が重心となるとき $AP^2+BP^2+CP^2$ 最小となる

(2) 点 Q $(c,\ d)$ と三角形の各辺からの距離の 2 乗の和を L とすると

$$L=\frac{(c+2d-4)^2}{1^2+2^2}+\frac{(2c-d-2)^2}{2^2+(-1)^2}+\frac{(c-d+5)^2}{1^2+(-1)^2}$$

$$=\frac{2(c+2d-4)^2+2(2c-d-2)^2+5(c-d+5)^2}{10}$$

$$\begin{aligned}(\text{分子})&=2(c^2+4d^2+16+4cd-16d-8c)\\&\quad+2(4c^2+d^2+4-4cd+4d-8c)\\&\quad+5(c^2+d^2+25-2cd-10d+10c)\\&=15c^2-10cd+18c+15d^2-74d+165\\&=15\left(c-\frac{5d-9}{15}\right)^2-\frac{25d^2-90d+81}{15}+15d^2-74d+165\\&=15\left(c-\frac{5d-9}{15}\right)^2+\frac{40}{3}d^2-68d+\frac{798}{5}\\&=15\left(c-\frac{5d-9}{15}\right)^2+\frac{40}{3}\left(d-\frac{51}{20}\right)^2+\frac{729}{10}\end{aligned}$$

よって，L は $c-\dfrac{5d-9}{15}=0$ かつ $d=\dfrac{51}{20}$，

すなわち $c=\dfrac{1}{4}$，$d=\dfrac{51}{20}$ のとき最小となる

したがって，求める点は

$$\left(\frac{{}^{オ}1}{{}^{カ}4},\ \frac{{}^{キ}51}{{}^{ク}20}\right)$$