座標平面上に，円 C：$x^2+y^2-2x-6y+5=0$ と直線 ℓ：$x+3y=15$ がある。また，2 点 A$(-2,\ 1)$，B$(0,\ -1)$ を結ぶ線分の中点を E とする。

(1)　円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(2)　円 C と直線 ℓ の共有点の座標を求めよ。

(3)　座標平面上の点 P$(x,\ y)$ に対して，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-2\mathrm{EP}^2$ の値を求めよ。

(4)　連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y+5 \leqq 0 \\ x+3y \geqq 15 \end{cases}$ の表す領域を D とする。点 P$(x,\ y)$ がこの領域 D を動くとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最大値を求めよ。

(11　金沢大)

解説

(1) $x^2+y^2-2x-6y+5=0$

$(x-1)^2+(y-3)^2=5$

よって，円 C の中心 C_0 は $(1,\ 3)$，半径は $\sqrt{5}$

(2) $x+3y=15$ より $x=-3y+15$

これを C の式に代入して

$(-3y+15)^2+y^2-2(-3y+15)-6y+5=0$

$y^2-9y+20=0$

$(y-4)(y-5)=0$　　$\therefore\ y=4,\ 5$

よって，求める共有点の座標は $(3,\ 4)$，$(0,\ 5)$

(3) 線分 AB の中点 E の座標は，$\mathrm{E}\left(\dfrac{-2+0}{2},\ \dfrac{1+(-1)}{2}\right)=(-1,\ 0)$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-2\mathrm{EP}^2 &= \{(x+2)^2+(y-1)^2\}+\{x^2+(y+1)^2\}-2\{(x+1)^2+y^2\} \\ &= (x^2+4x+y^2-2y+5)+(x^2+y^2+2y+1)-2(x^2+2x+y^2+1) \\ &= 4\end{aligned}$$

注 本問は中線定理を証明しているのと同じことです。

$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=2(\mathrm{EP}^2+\mathrm{EA}^2)$ において，$\mathrm{EA}=\sqrt{2}$ を変形しただけです。

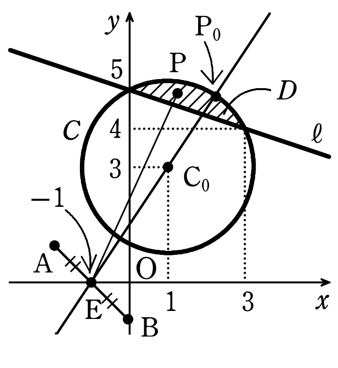
(4) 領域 D は，右図の斜線部分。ただし，境界線を含む

(3)から，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=2\mathrm{EP}^2+4$ より

$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ が最大となるのは，EP^2 が最大となるとき，すなわち領域 D を動く点 P が E から最も遠くなるときである

EP が最大となるのは P が図の P_0 となるときで

このとき，$\mathrm{EP}=\mathrm{EC}_0+\mathrm{C}_0\mathrm{P}_0=\sqrt{13}+\sqrt{5}$ より



$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=2(\sqrt{13}+\sqrt{5})^2+4$

$=40+4\sqrt{65}$