n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1，X_2，……，X_n とする。

(1)　X_1，X_2，……，X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2)　X_1，X_2，……，X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

(3)　X_1，X_2，……，X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

(20　北海道大)

解説

(1) X_1，X_2，…，X_n の最大公約数が 3 となるのは

X_1，X_2，…，X_n がすべて 3, 6 であり，かつ， X_1，X_2，…，X_n のうち少なくとも 1 つは 3 のときであるから，求める確率は

$$\frac{2^n-1}{6^n}$$

(2) X_1，X_2，…，X_n はすべて1 以上 6 以下の整数であるから，

これらの最大公約数は 1 以上 6 以下の整数である

最大公約数が 3 となる組 $(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ の総数は (1) より 2^n-1 通り

最大公約数が 5 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 5 のときで，

そのような組 $(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ の総数は 1 通り

最大公約数が 2 または 4 または 6 となるのは，X_1，X_2，…，X_n がすべて 2 の倍数のときで，そのような組 $(X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n)$ の総数は 3^n 通り

よって，最大公約数が 1 となるような組 $(X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n)$ の総数は

$$6^n-(2^n-1+1+3^n)=6^n-3^n-2^n \text{ 通り}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n}$$

(3) $20=2^2\times5$ より

X_1，X_2，…，X_n の最小公倍数が 20 となるのは

X_1，X_2，…，X_n がすべて 1，2，4，5 のいずれかであり，かつ

4, 5 を少なくとも 1 つずつは含めばよい

A ：すべてが 1, 2, 4, 5 のいずれか

B ：4, 5 を少なくとも 1 つは含む　事象とすると

　(4 を少なくとも 1 つ含み，かつ，5 を少なくとも 1 つ含む)

求める確率は $P(A\cap B)$

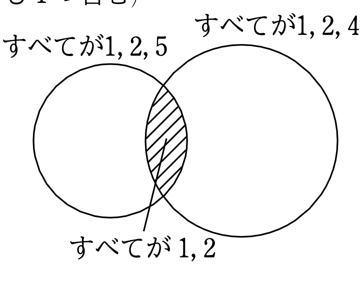
$$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})$$

ここで， $A\cap\overline{B}$ という集合は

　すべてが 1, 2 ,4, 5 のいずれか，かつ

　4 を含まない，または，5 を含まない

　→すべてが 1, 2, 5，または，すべてが 1, 2, 4



$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= \frac{4^n - (2 \cdot 3^n - 2^n)}{6^n} \\
&= \frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}
\end{aligned}
$$