

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=3, a_n=\frac{3a_{n-1}+2}{a_{n-1}+2} (n\geq 2)$ により定められるものとする.

この数列は関係式 $\frac{1}{a_n - \text{ア}\boxed{}} = \frac{\text{イ}\boxed{}}{a_{n-1} - \text{ウ}\boxed{}} + \text{エ}\boxed{} (n\geq 2)$ を満たす.

これより一般項を求めると $a_n = \frac{\text{オ}\boxed{} \cdot \text{カ}\boxed{}^n + \text{キ}\boxed{}}{\text{ク}\boxed{}^n - 1} (n\geq 1)$ となる.

空欄には自然数を入れよ.

(97 東京理科大)

解説

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n - k} &= \frac{1}{\frac{3a_{n-1}+2}{a_{n-1}+2} - k} = \frac{a_{n-1}+2}{3a_{n-1}+2-k(a_{n-1}+2)} = \frac{a_{n-1}+2}{(3-k)a_{n-1}+2-2k} \\ &= \frac{a_{n-1}+2}{(3-k)\left(a_{n-1}-\frac{2k-2}{3-k}\right)} \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{2k-2}{3-k} = k (k \neq 3)$$

となる k は

$$2k-2 = k(3-k)$$

$$k^2 - k - 2 = 0$$

$$(k+1)(k-2) = 0$$

k は自然数より, $k=2$

このとき

$$\frac{1}{a_n - 2} = \frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}-2} = \frac{4}{a_{n-1}-2} + 1$$

となり, 空欄の条件を満たす

$$b_n = \frac{1}{a_n - 2} \text{ とおくと, } b_1 = \frac{1}{a_1 - 2} = 1$$

$$b_n = 4b_{n-1} + 1 (n \geq 2)$$

$$b_{n+1} = 4b_n + 1 (n \geq 1)$$

$$b_{n+1} + \frac{1}{3} = 4\left(b_n + \frac{1}{3}\right)$$

数列 $\left\{b_n + \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $b_1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, 公比 4 の等比数列より

$$b_n + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \cdot 4^{n-1} = \frac{1}{3} \cdot 4^n$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$$

よって,

$$a_n = \frac{1}{b_n} + 2 = \frac{3}{4^n - 1} + 2 = \frac{2 \cdot 4^n + 1}{4^n - 1}$$