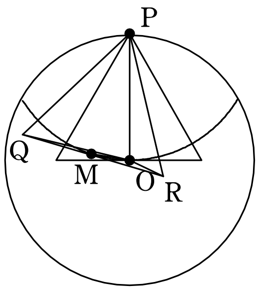
平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に点 P をとり，円の内部または周上に 2 点 Q, R を，△ PQRが 1 辺の長さ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形になるようにとる．このとき， OQ^2+OR^2 の最大値および最小値を求めよ．

(79　東京大)

(解説)

図のように，Q と R の中点を M とする



中線定理より

$$OQ^2+OR^2=2(OM^2+QM^2)$$

$QM=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で一定であるから，OM の最大，最小を考えればよい。

OM が最小となるのは M＝O のときで，このとき

$$OQ^2+OR^2=2\left(0+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

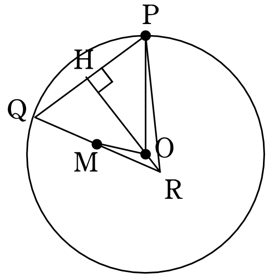
PM＝1 で一定であるから，M は P を中心とする半径 1 の円周上を動く

OM が最大となるのは，Q または R が O を中心とする半径 1 の円周上にあるときで，

Q が円周上にあるとき，

R から PQ に下ろした垂線の足を H とすると

O はこの直線上にあることに注意して，



$$OH=\sqrt{OP^2-HP^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$OR=RH-OH=1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ ,MR=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

△OMR で余弦定理より

$$\begin{aligned}OM^2&=OR^2+MR^2-2\cdot OR\cdot MR\cdot\sin 30^\circ\\&=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=1-\frac{2\sqrt{6}}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-1+\frac{\sqrt{6}}{3}=1-\frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

よって，このとき

$$OQ^2+OR^2=2\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2(4-\sqrt{6})}{3}$$