さいころを n 回投げたとき，出た目の最小公倍数を m とする。ただし，$n \geqq 2$ とする。
(1)　$m=2$ となる確率を求めよ。
(2)　$m=4$ となる確率を求めよ。
(3)　$m=6$ となる確率を求めよ。
(4)　m がさいころの出た目の 1 つと等しくなる確率を求めよ。
(18　同志社大)

(解説)

(1) $m=2$ となるのは
すべての目が $1, 2$ のいずれかで，かつ， 2 が少なくとも 1 回出ればよいから
求める確率は
$$\frac{2^n-1}{6^n}$$
(2) $m=4$ となるのは
すべての目が $1, 2, 4$ のいずれかで，かつ，4 が少なくとも 1 回出ればよいから
求める確率は
$$\frac{3^n-2^n}{6^n}$$
(3) $m=6$ となるのは
すべての目が $1, 2, 3, 6$ のいずれかで，かつ，
2 の倍数と 3 の倍数の目が少なくとも 1 回ずつは出ればよいから
A ：すべての目が $1, 2, 3, 6$ のいずれか
B ：2 の倍数と 3 の倍数の目が少なくとも 1 回は出る　事象とすると
求める確率は $P(A\cap B)$
$$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})$$
$A\cap\overline{B}$ という集合は
　すべての目が $1, 2, 3, 6$ のいずれか，かつ
　2 の倍数の目を含まない，または，3 の倍数の目を含まない
　→すべての目が $1, 3$ ，または，すべての目が $1, 2$
$$P(A\cap B)=\frac{4^n-(2\cdot 2^n-1)}{6^n}$$
$$=\frac{4^n-2^{n+1}+1}{6^n}$$
(4) さいころの目は最大で 6 であるので，条件を満たすとき $m \leqq 6$ である
条件を満たすのは
(ｉ) $m=1$ のとき
すべての目が 1 となればよいから 1 通り
(ii) $m=2, 3, 5$ のとき
(1)の場合と同じなので， 2^n-1 通り

(iii) $m=4$ のとき

(2)の場合と同じなので，3^n-2^n 通り

(iv) $m=6$ のとき

すべての目が $1, 2, 3, 6$ のいずれかで，かつ，

少なくとも 1 回は 6 の目が出ればよいから，4^n-3^n 通り

(i)〜(iv)より，求める確率は

$$\frac{1+3\cdot(2^n-1)+(3^n-2^n)+(4^n-3^n)}{6^n}=\frac{4^n+2^{n+1}-2}{6^n}$$