(1)　2 つの正の数 x_1 と x_2 について，その相加平均 H_2 と相乗平均 G_2 との間に，次の関係があることを証明せよ。

$$H_2 \geqq G_2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2}(x_1+x_2) \geqq \sqrt{x_1x_2}$$

(2)　4 つの正の数 x_1，x_2，x_3，x_4 について，その相加平均 H_4 と相乗平均 G_4 との間に，次の関係があることを証明せよ。

$$H_4 \geqq G_4 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4) \geqq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$$

(3)　(2) において，$x_4=\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ とおくことにより，3 つの正の数 x_1，x_2，x_3 について，その相加平均 H_3 と相乗平均 G_3 との間に，次の関係があることを証明せよ。

$$H_3 \geqq G_3 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \geqq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

(09　中央大)

解説

(1) $\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\sqrt{x_1x_2}=\frac{1}{2}(x_1-2\sqrt{x_1x_2}+x_2)=\frac{1}{2}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geqq 0$

$\therefore \frac{1}{2}(x_1+x_2) \geqq \sqrt{x_1x_2}$

(2) (1)より

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_3+x_4)\right\}\\&\geqq \frac{1}{2}(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4})\\&\geqq \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}}=\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\end{aligned}$$

(3) $\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4) \geqq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$ において，$x_4=\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ とおくと

$$\frac{1}{4}\left(x_1+x_2+x_3+\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\right) \geqq \sqrt[4]{x_1x_2x_3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}}=\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\right)^4}=\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

$$x_1+x_2+x_3+\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \geqq 4\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

$\therefore \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \geqq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$