(1) $x>0$ における $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$ の最小値は $\boxed{}$ である。

(2) $x>0$ のとき，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)$ の最小値を求めよ。

((1) 21　立教大　(2) 09　慶応大)

解説

(1) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{2}{x}\right)=x^2+\dfrac{2}{x^2}+3$

$x^2>0$，$\dfrac{2}{x^2}>0$ であるから，相加相乗平均より

$$x^2+\frac{2}{x^2}\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{2}{x^2}}=2\sqrt{2}$$

等号成立は $x^2=\dfrac{2}{x^2}$，すなわち $x=\sqrt[4]{2}$ のとき

このとき，最小値をとり

最小値 $2\sqrt{2}+3$

注 $x+\dfrac{1}{x}\geqq 2,\ x+\dfrac{2}{x}\geqq 2\sqrt{2}$ より

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{2}{x}\right)\geqq 4\sqrt{2}$$

であるから，最小値は $4\sqrt{2}$ としてはいけません。

等号成立条件が前者は $x=1$ のときで，後者は $x=\sqrt{2}$ のときなので，2 と $2\sqrt{2}$ の値を同時にとることができないからです。

(2) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)=2x^2+\dfrac{1}{2}+2+\dfrac{1}{2x^2}=2x^2+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{5}{2}$

$2x^2>0$，$\dfrac{1}{2x^2}>0$ であるから，相加相乗平均より

$$2x^2+\frac{1}{2x^2}\geqq 2\sqrt{2x^2\cdot\frac{1}{2x^2}}=2$$

等号成立は $2x^2=\dfrac{1}{2x^2}$，すなわち $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

このとき，最小値をとり

最小値 $2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$