A, B, a, b, c, d を正の実数とする．

(1) $\dfrac{A+B}{2} \geqq \sqrt{AB}$ を証明せよ．

(2) (1)を利用して $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$ を証明せよ．

(3) $\dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{a+b+c+d}{4}$ を満たす d を考え，(2)を利用して $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ を証明せよ．

(解説)

(1) $\dfrac{A+B}{2} - \sqrt{AB} = \dfrac{A+B-2\sqrt{AB}}{2} = \dfrac{(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2}{2} \geqq 0$

$\therefore \dfrac{A+B}{2} \geqq \sqrt{AB}$

等号成立は $A=B$ のとき

(2) (1)より

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{c+d}{2}}{2} \geqq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

等号成立は

$a=b, c=d$ かつ $\sqrt{ab}=\sqrt{cd}$ ，すなわち， $a=b=c=d$ のとき

(3) $\dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{a+b+c+d}{4}$ のとき

$$d = \frac{4}{3}(a+b+c) - (a+b+c) = \frac{a+b+c}{3}$$

(2)において $d = \dfrac{a+b+c}{3}$ とおくと

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}} = (abc)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \geqq (abc)^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

等号成立は

$a=b=c=\dfrac{a+b+c}{3}$ ，すなわち， $a=b=c$ のとき