直方体の体積を k^3 とし，その直方体の縦，横，高さをそれぞれ，a，b，h とする。

(1)　直方体の体積 k^3 と高さ h を固定したとき，対角線の長さの 2 乗の最小値を求めよ。

(2)　体積が k^3 である直方体の中で，対角線の長さが最小となるのは立方体であることを示せ。

(05　岩手大)

解説

(1) $abh=k^3$ より，$ab=\dfrac{k^3}{h}$

相加相乗平均より

$$a^2+b^2+h^2\geqq 2ab+h^2=\frac{2k^3}{h}+h^2=\frac{h^3+2k^3}{h}$$

等号成立は $a=b=\sqrt{\dfrac{k^3}{h}}=k\sqrt{\dfrac{k}{h}}$ のとき

このとき，最小値をとり，最小値は $\dfrac{h^3+2k^3}{h}$

(2) (1)より $\dfrac{h^3+2k^3}{h}$ が最小となる場合を考えればよい

$h>0$，$k>0$ であるから，相加相乗平均より

$$\frac{h^3+2k^3}{h}=h^2+\frac{2k^3}{h}=h^2+\frac{k^3}{h}+\frac{k^3}{h}\geqq 3\sqrt[3]{h^2\cdot\frac{k^3}{h}\cdot\frac{k^3}{h}}=3k^2$$

等号成立は $h^2=\dfrac{k^3}{h}$，すなわち $h=k$ のとき

このとき，$a=b=k$ となる

よって，対角線の長さが最小となるのは立方体のとき

注

この問題では，

$$h^2+\frac{2k^3}{h}=h^2+\frac{k^3}{h}+\frac{k^3}{h}$$

と変形するのがポイントである。ここで，

$$\frac{2k^3}{h}=\frac{2k^3}{3h}+\frac{4k^3}{3h},\cdots$$

などともできるが，等号成立条件を利用するためには

$$\frac{2k^3}{h}=\frac{k^3}{h}+\frac{k^3}{h}$$

とするしかないので，このように分けるのである。