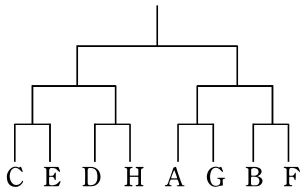
A から H までの 8 人の選手が勝ち残り式トーナメント方式で優勝を争う。トーナメントの組み合わせは試合前に抽選で無作為に決めるものとする。
例えば，右の図は，そのような組み合わせの 1 つである。



いま，すべての選手が互角であり，それぞれの試合で相手に勝つ確率が $\dfrac{1}{2}$ であるとき，選手 A が優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

もし，選手 H だけが他の選手より優れており，相手に勝つ確率が $\dfrac{2}{3}$ であったとすると，選手 A の優勝の可能性はトーナメントの組み合わせによって変わることになるが，抽選前の段階では，選手 A が優勝する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(17　慶応大)

解説

(前半) A が 上がってきた選手に 3 回勝てばよいから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{{}^{ア}1}{{}^{イ}8}$$

(後半)

A と H がともに勝ち上がった場合， H が A と

(i) 1 回戦で当たる山にいる場合

$$\frac{1}{8-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

(ii) 2 回戦で当たる山にいる場合

(ア) 2 回戦で H と当たる場合

$$\frac{2}{8-1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

(イ) 2 回戦で H 以外と当たる場合

$$\frac{2}{8-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

(iii) 3 回戦で当たる山にいる場合

(ア) 3 回戦で H と当たる場合

$$\frac{2^2}{8-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3}$$

(イ) 3 回戦で H 以外と当たる場合

$$\frac{2^2}{8-1}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

これらは排反であるから，求める確率は

$$\frac{9+12+9+16+30}{7\cdot 3^3\cdot 2^2}=\frac{19}{189}$$

$\boxed{\text{別解}}$

H が優勝するのは，H が 上がってきた選手に 3 回勝てばよいから，その確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$$

誰かは必ず優勝し，H 以外の 7 人が優勝する確率はどれも等しいから，求める確率は

$$\frac{1}{7}\left(1-\frac{8}{27}\right)=\frac{{}^{ウ}19}{{}^{エ}189}$$