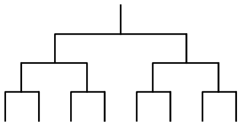
2^n 人の選手がトーナメント(図のような組合せの試合方式)で優勝を争う。選手 A は他のどの選手にも確率 $p\,(0<p<1)$ で勝つものとし，A 以外の選手の力は互角であるとする。トーナメントの組合せはくじで決める。このとき次を求めよ。



(1) A が優勝する確率

(2) A が行う試合の数の期待値

(3) A 以外の特定の選手 B が優勝する確率

(84　横浜市立大)

解説

(1) A が勝ち上がってきた選手に n 回勝てばよいから

p^n

(2) A が k 試合行う確率は

$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき，　$p^{k-1}(1-p)$

$k=n$ のとき，　p^{n-1}

よって，求める期待値は

$$\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1}(1-p)+np^{n-1}=(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1}+np^{n-1}$$

$$=\frac{1-p^{n-1}}{1-p}-(n-1)p^{n-1}+np^{n-1}$$

$$=\frac{1-p^{n-1}}{1-p}+p^{n-1}=\frac{1-p^n}{1-p}$$

(3) B と A がともに勝ち上がった場合， A が B と $k\,(1 \leqq k \leqq n)$ 回戦で当たる山にいるとき，B が優勝するのは

(i) k 回戦で A と当たる場合

$$\frac{2^{k-1}}{2^n-1}\cdot p^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot(1-p)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

(ii) k 回戦で A 以外と当たる場合

$$\frac{2^{k-1}}{2^n-1}\cdot(1-p^{k-1})\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

これらは排反であるから

$$\frac{2^{k-1}}{2^n-1}\cdot p^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot(1-p)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}+\frac{2^{k-1}}{2^n-1}\cdot(1-p^{k-1})\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{2^n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}\{(1-2p)p^{k-1}+1\}$$

B が優勝する確率は， $k=1, 2, 3, \cdots, n$ すべての場合を考えて

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}\{(1-2p)p^{k-1}+1\}$$

$$=\frac{1}{2^n-1}\left\{(1-2p)\sum_{k=1}^{n} p^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}\right\}$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n} p^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+p\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+p^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\quad（公比 2p）$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\{1-(2p)^{n}\}}{1-2p}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

より

$$=\frac{1}{2^{n}-1}\left\{(1-2p)\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\{1-(2p)^{n}\}}{1-2p}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}=\frac{1-p^{n}}{2^{n}-1}$$

$\boxed{\text{別解}}$

A が優勝しない確率は $1-p^{n}$ で，

他の $2^{n}-1$ 人について，どの人が優勝する確率も等しいから，

B が優勝する確率は

$$\frac{1-p^{n}}{2^{n}-1}$$