b_1，b_2，b_3 を正の実数とする．$a_1=b_1{}^3$，$a_2=b_2{}^3$，$a_3=b_3{}^3$ とするとき

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}-\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=\frac{1}{\overset{\text{ア}}{\boxed{}}}(b_1+b_2+b_3)\{(b_1-b_2)^2+(b_2-b_3)^2+(b_3-b_1)^2\}$$

となる．したがって，$\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ であり，等号は $a_1=a_2=a_3$ のときに限り成立する．この不等式を用いれば，正の実数 a，b に対して，

$4(a^2+ab)^3\geqq3^3(a^2b)^{\text{イ}\boxed{}}$ が得られる．

底面が半径 a の円，高さが b の直円柱を考える．不等式の等号成立条件から，表面積を一定にして体積を最大にしたとき，$b=\overset{\text{ウ}}{\boxed{}}a$ である．

(03　慶応大)

解説

$a_i=b_i{}^3$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ より

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}-\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=\frac{1}{3}(b_1{}^3+b_2{}^3+b_3{}^3-3b_1b_2b_3)$$

$$=\frac{1}{3}(b_1+b_2+b_3)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2-b_1b_2-b_2b_3-b_3b_1)$$

$$=\frac{1}{6}(b_1+b_2+b_3)\{(b_1-b_2)^2+(b_2-b_3)^2+(b_3-b_1)^2\}\geqq0$$

$b_1>0$，$b_2>0$，$b_3>0$ であるから

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}\ \cdots①$$

①において，$a_1=2a^2$，$a_2=ab$，$a_3=ab$ とすると

$$2a^2+ab+ab\geqq3\sqrt[3]{2a^2\times ab\times ab}$$

$$\{2(a^2+ab)\}^3\geqq3^3\times2\times a^4b^2$$

$$\therefore\ 4(a^2+ab)^3\geqq3^3(a^2b)^2\ \cdots②$$

底面が半径 a の円，高さが b の直円柱の

表面積は $2\pi a^2+2\pi ab=2\pi(a^2+ab)$

体積は πa^2b

②より

$$\pi a^2b\leqq\pi\sqrt{\frac{4}{27}(a^2+ab)^3}$$

表面積は一定であるから，a^2+ab は一定より，

$2a^2=ab$，すなわち $b=2a$ のとき等号が成り立ち，このとき最大値をとる