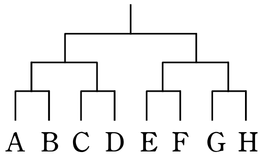
A，B，C，D，E，F，G，H の 8 人の選手が右図の組み合わせでトーナメント戦を行う。A と A 以外の選手との試合で A が勝つ確率を p $(0<p<1)$ とし，A 以外の選手同士の試合では互いに勝つ確率は等しいものとする。また，いずれの試合においても引き分けはないものとする。



(1)　B が優勝する確率を求めよ。　　　(2)　C が優勝する確率を求めよ。

(3)　A が準優勝する確率と H が準優勝する確率が等しくなるような p の値をすべて求めよ。ここで，準優勝とは決勝戦で敗れることをいう。

(19　兵庫県立大)

解説

(1) 1 回戦で A に勝ち，2 回戦で C または D に勝ち，3 回戦で E～H のいずれかに勝てばよいから

$$(1-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(1-p)$$

(2) (ⅰ) 2 回戦で A と対戦して優勝する

$$p\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-p)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}p(1-p)$$

(ⅱ) 2 回戦で B と対戦して優勝する

$$(1-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}(1-p)$$

(ⅰ), (ⅱ)は排反より，求める確率は

$$\frac{1}{4}p(1-p)+\frac{1}{8}(1-p)=\frac{1}{8}(1-p)(2p+1)$$

(3) A が準優勝するのは

$$p^2(1-p)$$

H が準優勝するのは

(ⅰ) 決勝戦で A と対戦して負ける

$$p^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot p=\frac{1}{4}p^3$$

(ⅱ) 決勝戦で A 以外と対戦して負ける

A が決勝戦まで上がらず，H が決勝まで上がって負けるから

$$(1-p^2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}(1-p^2)$$

(ⅰ), (ⅱ)は排反より

$$\frac{1}{4}p^3+\frac{1}{8}(1-p^2)$$

よって

$$p^2(1-p)=\frac{1}{4}p^3+\frac{1}{8}(1-p^2)$$

$$10p^3-9p^2+1=0$$

$(2p-1)(5p^2-2p-1)=0 \quad \therefore\ p=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{6}}{5}$

$0<p<1$ より

$p=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{6}}{5}$