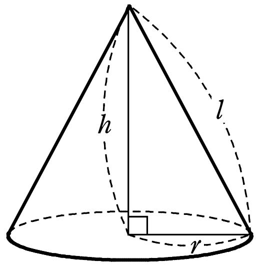
体積が $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ の直円錐において，直円錐の側面積の最小値を求めよ。ただし直円錐とは，底面の円の中心と頂点とを結ぶ直線が，底面に垂直である円錐のことである。

(21　札幌医大)

解説

直円錐の底面の円の半径を r，高さを h，母線の長さを l とおくと

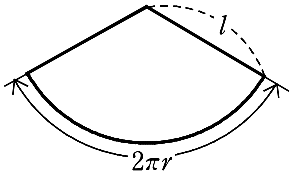


$$l=\sqrt{r^2+h^2},\quad r>0,\quad h>0$$

この直円錐の体積が $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ より

$$\frac{1}{3}\pi hr^2=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi \qquad \therefore\ h=\frac{\sqrt{2}}{r^2}$$

この直円錐の側面は右の図のような扇形で，その面積 S は



$$S=\frac{1}{2}\cdot l^2\cdot\frac{2\pi r}{l}=\pi lr=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$$

$$=\pi r\sqrt{r^2+\frac{2}{r^4}}=\pi\sqrt{r^4+\frac{2}{r^2}}$$

$r^2=x$ とおくと

$$S=\pi\sqrt{x^2+\frac{2}{x}},\quad x>0$$

ここで， $x>0$ であるから相加相乗平均より

$$x^2+\frac{2}{x}=x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geqq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=3$$

等号成立は $x^2=\dfrac{1}{x}$，すなわち $x=1$ のときで，

このとき，最小値をとり

最小値 $\sqrt{3}\pi$