(1)　a，b を正の定数とする．$x>0$ の範囲で，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}$ の最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

(2)　$x>0$，$y>0$，$z>0$ の範囲で，$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{1}{z}$ の最小値を求めよ．また，そのときの x，y，z の値を求めよ．

(02　東海大)

解説

(1) $\dfrac{x}{a}>0$，$\dfrac{b}{x}>0$ であるから，相加相乗平均より

$$\frac{x}{a}+\frac{b}{x}\geqq 2\sqrt{\frac{x}{a}\cdot\frac{b}{x}}=2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

等号成立は $\dfrac{x}{a}=\dfrac{b}{x}$，すなわち $x=\sqrt{ab}$ のとき

このとき，最小値をとり

最小値 $2\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

(2) $\dfrac{x}{4}>0$，$\dfrac{y}{x}>0$，$\dfrac{z}{y}>0$，$\dfrac{1}{z}>0$ であるから

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{1}{z}\geqq 4\sqrt[4]{\frac{x}{4}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{1}{z}}=2\sqrt{2}$$

等号成立は $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{x}=\dfrac{z}{y}=\dfrac{1}{z}$，すなわち $x=2\sqrt{2}$，$y=2$，$z=\sqrt{2}$ のとき

このとき，最小値をとり

最小値 $2\sqrt{2}$