高3数学β　2017スタンダード演習　32.微分法(1)

$\boxed{1}$［2014 南山大］

$a>0$ とする。放物線 $y=x^2$ と円 $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ がただ1つの共有点Pをもち，Pと円の中心を通る直線の傾きが $-\dfrac{1}{2}$ であるとき，Pの座標 $(x,\ y)$ を求めると

$(x,\ y)=$ ${}^{ア}\boxed{}$ であり，a と b の値を求めると $(a,\ b)=$ ${}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{2}$［2015 福島大］

2つの曲線 $y=-2x^3+3$，$y=-2x^3-1$ のどちらにも接する直線の方程式 $y=ax+b$ を求めよ。

$\boxed{3}$［2006 徳島大］

放物線 $y=x^2$ を C とし，C 上にない点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える。

(1)　点Pから放物線 C に異なる2本の接線が引けるとき，a，b の満たす条件を求めよ。

(2)　(1)の2本の接線を ℓ_1，ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 が直交するような点P全体のなす図形を図示せよ。

(3)　(1)の2本の接線 ℓ_1，ℓ_2 が直交しているとき，ℓ_1，ℓ_2 が放物線 C に接する接点をそれぞれA，Bとする。△PABの面積を a を用いて表せ。

$\boxed{4}$［2009 北海道大］

$t>0$ とし，$x=t$ で表される直線を ℓ_1 とする。$y=\dfrac{x^2}{4}$ で表される放物線を C とおく。

C と ℓ_1 の共有点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における C の接線を ℓ_2 とする。

(1)　ℓ_1 と ℓ_2 のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2)　ℓ_1 を ℓ_2 に関して対称移動させた直線を ℓ_3 とおくとき，ℓ_3 の方程式を求めよ。

(3)　ℓ_3 は t によらない定点を通ることを示せ。

(4)　ℓ_3 と C の2つの共有点をP，Qとする。線分PQの長さが最小になるような t の値を求めよ。

$\boxed{5}$［2003 関西大］

放物線 $C: y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(s,\ s^2)$，$\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ をとる．ただし $s<0<t$ とする．Pにおける C の接線とQにおける C の接線の交点をRとする．

(1)　Rの座標を s と t で表せ．

(2)　$\angle\mathrm{PQR}=90^\circ$ のとき，s を t で表せ．

(3)　$\angle\mathrm{PQR}=90^\circ$ で t が $t>0$ の範囲を動くとき，△PQRの面積 S の最小値を求めよ．

$\boxed{6}$ [2009 慶応義塾大]

関数 $y=x^3-6x^2-3x$ の極大値を求めよ。

$\boxed{7}$ [2010 大阪教育大]

係数が実数である多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して，方程式 $f(x)=0$ が異なる3つの実数解をもつとき，次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f'(x)=0$ は異なる2つの実数解をもつことを示せ。

(2)　(1)の解を，α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ と $\alpha^3+\beta^3$ を a，b で表せ。

(3)　次の式が成立することを示せ。

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

$\boxed{8}$ [2008 南山大]

関数 $f(x)=2x^3+3px^2+3px-\dfrac{3}{2}p^2$ は，$x=\alpha$ で極大値 $f(\alpha)$ を，$x=\beta$ で極小値 $f(\beta)$ をとる。ただし，p は実数とする。

(1)　p のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(\alpha)+f(\beta)$ を p を用いて表せ。

(3)　2点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ線分の中点の軌跡を求めよ。また，そのグラフをかけ。

$\boxed{9}$ [2007 横浜国立大]

a，b は実数とする。関数 $f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ が極大値と極小値をもつ。

(1)　極大値が正で，極小値が負で，かつ極大値と極小値の和が負となる点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

(2)　極大値が1で，極小値が -1 であるような点 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

$\boxed{10}$ [2005 名古屋大]

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となると仮定する。

(1)　$f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$ となることを示せ。

(2)　$f(\alpha)+f(\beta)=\dfrac{2}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{11}$ [1998 千葉工業大]

3次関数 $f(x)=x^3-9x^2+12x-1$ について，(極大値)$-$(極小値) の値を求めよ.

$\boxed{12}$ [2015 学習院大]

実数 a，b に対して，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ を考える。

(1)　$f(x)$ が極大値と極小値をもつための a，b の条件を求めよ。

(2)　a，b が (1) の条件を満たすとする。$f(x)$ の極大値と極小値の差が 4 に等しく，かつ $f(4)=4$ であるとき，a，b の値を求めよ。

$\boxed{13}$ [1999 関西大]

3 次関数 $f(x)=x(x^2+ax+b)$ について

(1)　$f(x)$ が極大値と極小値をもつための条件を a，b で表せ.

(2)　$f(x)$ が極大となる x の値が $0<x<1$ を満たすような点 (a, b) が存在する領域を図示せよ.