高3数学β　2017スタンダード演習　10.等式･不等式の証明

$\boxed{1}$ [1997 東京歯科大]

$\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}\ (\neq 0)$ のとき，連比 $x:y:z=$ ア$\boxed{}$ であり，$\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ の値は イ$\boxed{}$ となる.

$\boxed{2}$ [2012 立教大]

互いに異なる定数 a，b，c が $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ を満たすとき，

$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$ の値を求めよ。ただし，$abc\neq 0$ とする。

$\boxed{3}$ [1997 東北学院大]

a, b, c を実数とするとき，次の不等式を証明せよ．また，等号が成り立つのはどのような場合か.

(1)　$a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$

(2)　$a^4+b^4+c^4\geqq abc(a+b+c)$

$\boxed{4}$ [1997 東京学芸大]

絶対値が 1 より小さい 4 つの実数 a, b, c, d に対し，次の不等式が成り立つことを示せ.

(1)　$a+b<1+ab$

(2)　$a+b+c+d<3+abcd$

$\boxed{5}$［2009 中央大］

(1)　2 つの正の数 x_1 と x_2 について，その相加平均 H_2 と相乗平均 G_2 との間に，次の関係があることを証明せよ。

$$H_2 \geqq G_2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2}(x_1+x_2) \geqq \sqrt{x_1x_2}$$

(2)　4 つの正の数 x_1，x_2，x_3，x_4 について，その相加平均 H_4 と相乗平均 G_4 との間に，次の関係があることを証明せよ。

$$H_4 \geqq G_4 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4) \geqq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$$

(3)　(2) において，$x_4=\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ とおくことにより，3 つの正の数 x_1，x_2，x_3 について，その相加平均 H_3 と相乗平均 G_3 との間に，次の関係があることを証明せよ。

$$H_3 \geqq G_3 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \geqq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

$\boxed{6}$［2010 立教大］

$a>0$，$b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)$ の最小値は $\boxed{}$ である。

$\boxed{7}$［2009 慶応義塾大］

$x>0$ のとき，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{8}$［2006 釧路公立大］

実数 a，b が $a>-1$，$b>-2$ であるとき，次の式の最小値を求めよ。

$$2b+\frac{2}{a+1}+\frac{2a+2}{b+2}$$

$\boxed{9}$［2005 岩手大］

直方体の体積を k^3 とし，その直方体の縦，横，高さをそれぞれ，a，b，h とする。

(1)　直方体の体積 k^3 と高さ h を固定したとき，対角線の長さの 2 乗の最小値を求めよ。

(2)　体積が k^3 である直方体の中で，対角線の長さが最小となるのは立方体であることを示せ。

$\boxed{10}$［2006 明治学院大］

以下の問いに答えよ。ただし，文字はすべて実数を表す。

(1)　次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geqq |ax+by+cz|$$

(2)　次の不等式を証明せよ。

$$10(2a^2+3b^2+5c^2) \geqq (2a+3b+5c)^2$$

$\boxed{11}$［2008 兵庫医科大］

実数 a，b，c が $a+b+c=2$ を満たすとき，$a^2+b^2+c^2$ の最小値は $\boxed{}$ である。

$\boxed{12}$［2008 関西大］

a，b，c を $a^2+b^2+c^2=1$ を満たす実数とするとき，$a+b+c$ の最大値を求めよ。

$\boxed{13}$［2007 公立はこだて未来大］

すべての実数 x，y に対して $|x+y| \leqq |x|+|y|$ が成立することを示せ。また，等号が成立するのはどのようなときか。

$\boxed{14}$［2005 青山学院大］

次の不等式を証明せよ。ただし，文字はすべて実数とする。

(1)　$0 \leqq p \leqq q$ のとき，$\dfrac{p}{1+p} \leqq \dfrac{q}{1+q}$

(2)　$\dfrac{|p+q|}{1+|p+q|} \leqq \dfrac{|p|}{1+|p|}+\dfrac{|q|}{1+|q|}$