AB＝4，AC＝3 である三角形 ABC の辺 BC を 2：1 に内分する点を D とする。また，AD＝1 とする。

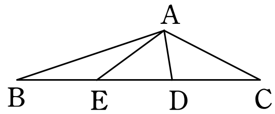
(1)　BC の長さを求めよ。

(2)　(1) とは別の解法で BC の長さを求めよ。

(21　浜松医大)

解説

(解1) 中線定理を利用



図のように E をおき，

BE＝ED＝DC＝ x , AE＝ y とおくと

△ABDとAEで中線定理より

$$4^2+1^2=2(y^2+x^2) \quad \therefore\ x^2+y^2=\frac{17}{2} \cdots ①$$

△AECとADで中線定理より

$$y^2+3^2=2(1^2+x^2) \quad \therefore\ y^2=2x^2-7 \cdots ②$$

①，②より

$$x^2+(2x^2-7)=\frac{17}{2}$$

$$x^2=\frac{31}{6} \quad \therefore\ x=\frac{\sqrt{186}}{6}$$

よって

$$BC=3x=\frac{\sqrt{186}}{2}$$

(解2) スチュワートの定理を利用

BE＝ED＝DC＝ x とおくと

スチュワートの定理より

$$AB^2+2AC^2=3(AD^2+BD\cdot CD)$$

$$16+2\cdot 9=3(1+2x^2)$$

$$x^2=\frac{31}{6} \quad \therefore\ x=\frac{\sqrt{186}}{6}$$

よって

$$BC=3x=\frac{\sqrt{186}}{2}$$

(解3) 三角比を利用 1

BE＝ED＝DC＝ x とおくと

△ABD で余弦定理より

$$1^2=4^2+(2x)^2-2\cdot4\cdot(2x)\cdot\cos B \qquad \therefore \cos B=\frac{4x^2+15}{16x} \cdots①$$

△ABC で余弦定理より

$$3^2=4^2+(3x)^2-2\cdot4\cdot(3x)\cdot\cos B \qquad \therefore \cos B=\frac{9x^2+7}{24x} \cdots②$$

①，②より

$$\frac{4x^2+15}{16x}=\frac{9x^2+7}{24x}$$

$$3(4x^2+15)=2(9x^2+7)$$

$$x^2=\frac{31}{6} \qquad \therefore x=\frac{\sqrt{186}}{6}$$

よって

$$\mathrm{BC}=3x=\frac{\sqrt{186}}{2}$$

(解4) 三角比を利用 2

BE＝ED＝DC＝ x , ∠ADB＝θ とおく

△ABD で余弦定理より

$$4^2=1^2+(2x)^2-2\cdot1\cdot(2x)\cdot\cos\theta \qquad \therefore \cos\theta=\frac{4x^2-15}{4x} \cdots①$$

△ADC で余弦定理より

$$3^2=1^2+x^2-2\cdot1\cdot x\cdot\cos(180^\circ-\theta) \qquad \therefore \cos\theta=\frac{8-x^2}{2x} \cdots②$$

①，②より

$$\frac{4x^2-15}{4x}=\frac{8-x^2}{2x}$$

$$4x^2-15=2(8-x^2)$$

$$x^2=\frac{31}{6} \qquad \therefore x=\frac{\sqrt{186}}{6}$$

よって

$$\mathrm{BC}=3x=\frac{\sqrt{186}}{2}$$

(解5) ベクトルを利用

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{4}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

$$1=\frac{52}{9}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{43}{4}$$

よって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\\&=9-2\cdot\left(-\frac{43}{4}\right)+16=\frac{93}{2} \quad \therefore\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\frac{\sqrt{186}}{2}\end{aligned}$$

(解6) 座標を利用

D を原点に置き，A (a,b) , C $(c,0)$ ($c>0$) とおくと，B は $(-2c,0)$ となる

OA$=1$ より， $a^2+b^2=1$

AB$=4$ より， $(a+2c)^2+b^2=16$ $\quad a^2+b^2+4ac+4c^2=16 \quad \therefore\ 4ac+4c^2=15$ …①

AC$=3$ より， $(a-c)^2+b^2=9$ $\quad a^2+b^2-2ac+c^2=9 \quad \therefore\ -2ac+c^2=8$ …②

①，②より

$$6c^2=31 \quad \therefore\ c=\frac{\sqrt{186}}{6}$$

よって

$$\mathrm{BC}=3c=\frac{\sqrt{186}}{2}$$