1.5　不定方程式(2)

(1) (2 元) 2 次不定方程式の整数解

　一般に，$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ ($a\fallingdotseq 0$ または $b\fallingdotseq 0$ または $c\fallingdotseq 0$) を (2 元) **2 次不定方程式**といいます。この節では 2 次不定方程式の整数解の求め方について考えます。まず，$a, c=0, b, d, e\fallingdotseq 0$ の場合である

$$bxy+dx+ey+f=0$$

の整数解の求め方について考えます。

注 一般に，x, y の 2 次式は $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ と表せます。

例1
(1) 等式 $ab-2a-4b+2=0$ を満たす整数 a，b の組をすべて求めよ。
(2) $2xy-2x-5y=0$ を満たす整数の組は 4 組ある．このときの yの値を求めよ．
(3) $6ab+2a-3b=13$ を満たす自然数 a，b をすべて求めよ．

解説
(1) $ab-2a-4b+2=0$
$(a-4)(b-2)=6$ (積の形を作る)
a，b が整数のとき，$a-4$，$b-2$ も整数である

$a-4$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
$b-2$	6	3	2	1	-6	-3	-2	-1

よって，

$$(a, b)=(5, 8), (6, 5), (7, 4), (10, 3), (3, -4), (2, -1), (1, 0), (-2, 1)$$

別解
$ab-2a-4b+2=0$
$(b-2)a=4b-2$
$b=2$ のとき，(左辺)$\fallingdotseq$(右辺)より，　$b\fallingdotseq 2$
両辺 $b-2$ で割って，

$$a=\frac{4b-2}{b-2}=\frac{4(b-2)+6}{b-2}=4+\frac{6}{b-2}$$

a が整数のとき，$b-2$ は 6 の約数であるから

$$b-2=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6 \qquad \therefore b=3, 1, 4, 0, 5, -1, 8, -4$$

よって，$(a, b)=(3, -4), (2, -1), (1, 0), (-2, 1), (10, 3), (7, 4), (6, 5), (5, 8)$

(2) $2xy-2x-5y=0$

$(2x-5)(y-1)=5$

x, y が整数のとき，$2x-5$, $y-1$ は整数である

$2x-5$	1	5	-1	-5
$y-1$	5	1	-5	-1

よって，

$(x, y)=(3, 6), (5, 2), (2, -4), (0, 0)$

したがって， $y=-4, 0, 2, 6$

(3) $6ab+2a-3b=13$

$(2a-1)(3b+1)=12$

a, b が自然数のとき， $2a-1, 3b+1$ は自然数である

$2a-1 \geqq 1, 3b+1 \geqq 4$ で， $2a-1$ は奇数， $3b+1$ は 3 で割って 1 余る数より

$2a-1$	3
$3b+1$	4

よって，

$(a, b)=(2, 1)$

例2

(1) a, b は整数とする ($ab \neq 0$)。$\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}=1$ を満たす (a, b) は，何組あるか。

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ となる自然数の組 (x, y) で $x \geqq y$ を満たすものをすべてあげると (x, y)$=\boxed{}$ である。

解説

(1) $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}=1$

両辺に ab を掛けて

$3a+2b=ab$

$ab-3a-2b=0$

$(a-2)(b-3)=6$

a, b が整数のとき， $a-2$, $b-3$ も整数である

$a, b \fallingdotseq 0$ であるから， $a-2 \fallingdotseq -2, b-3 \fallingdotseq -3$ より

$a-2$	1	2	3	6	-1	-3	-6
$b-3$	6	3	2	1	-6	-2	-1

よって，

$(a, b)=(3, 9), (4, 6), (5, 5), (8, 4), (1, -3), (-1, 1), (-4, 2)$ の 7 組

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$

$3y+3x=xy$

$(x-3)(y-3)=9$

$x \geqq y > 0$ であるから，$x-3 \geqq y-3 > -3$ より

$(x-3,\ y-3)=(9,\ 1),\ (3,\ 3)$

$\therefore (x,\ y)=(12,\ 4),\ (6,\ 6)$

$b, d, e=0, a, c, f \fallingdotseq 0$ の場合である， $ax^2+cy^2+f=0$ (a と c は異符号) の整数解の求め方について考えます。

例3

方程式 $x^2-y^2=9$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は ア$\boxed{}$ 組あり，xy の最大値は イ$\boxed{}$ である。

解説

$x^2-y^2=9$

$(x+y)(x-y)=9$

x, y が整数のとき， $x+y,\ x-y$ は整数である

$x+y$	1	3	9	-1	-3	-9
$x-y$	9	3	1	-9	-3	-1

よって，

$(x, y)=(5, -4), (3, 0), (5, 4), (-5, 4), (-3, 0), (-5, -4)$ の 6 組

xy の最大値は，20

例4

$\sqrt{n^2+24}$ が自然数となるような自然数 n は ア$\boxed{}$ と イ$\boxed{}$ である。ただし， ア$\boxed{}$ と イ$\boxed{}$ の解答の順序は問わない。

(解説)

$\sqrt{n^2+24}=m$ (m は自然数)とおくと,

$n^2+24=m^2$

$m^2-n^2=24$

$(m+n)(m-n)=24$

m, n が自然数のとき, $m+n, m-n$ は整数である

$m+n>0$ であるから, $m-n>0$ であり, $m+n>m-n$

$m+n$ と $m-n$ の偶奇は一致するから,

$m+n$	12	6
$m-n$	2	4

よって, $n=5, 1$

$d, e=0, a, b, c, f \neq 0$ の場合である $ax^2+bxy+cy^2+f=0$ の整数解の求め方について考えます。このタイプの問題は, $ax^2+bxy+cy^2$ が因数分解できるか, できないかで解き方が変わってきます。因数分解できるときは, 因数分解して積の形を作って考えます。因数分解できないときは, x または y の 2 次方程式とみて, 解の公式を利用して, 解の候補を絞り込んで考えます。後者については次の節で考えます。

例5

x, y を未知数とする方程式 $x^2-6xy+8y^2+3=0$ の正の整数解は $x=$ ア $\boxed{}$, $y=$ イ $\boxed{}$ および $x=$ ウ $\boxed{}$, $y=$ エ $\boxed{}$ である.

ただし, ア $\boxed{}$ $<$ ウ $\boxed{}$ とする.

(解説)

$x^2-6xy+8y^2+3=0$

$(x-2y)(x-4y)=-3$

x, y が正の整数であるとき, $x-2y, x-4y$ は整数である

また, $x-2y>x-4y$ であるから,

$x-2y$	1	3
$x-4y$	-3	-1

よって,

$(x, y)=(5, 2), (7, 2)$

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ ($a, b, c \fallingdotseq 0$ ， $d \fallingdotseq 0$ または $e \fallingdotseq 0$)の整数解の求め方について考えます。このタイプも $ax^2+bxy+cy^2$ が因数分解できるときは，因数分解を利用して解き，因数分解できないときは，解の公式を利用して解きます。後者については次節で考えます。

例6

方程式 $x^2+5xy+6y^2+x+2y=2$ に関して

(1)　左辺を因数分解せよ.

(2)　この方程式を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ.

(解説)

(1) $x^2+5xy+6y^2+x+2y$

$=(x+2y)(x+3y)+x+2y$

$=\{(x+2y)+k\}\{(x+3y)+l\}$ とおく

これを展開すると，

$(x+2y)(x+3y)+k(x+3y)+l(x+2y)+kl$

$(x+2y)(x+3y)+(k+l)x+(3k+2l)y+kl$

これが任意の x, y で成り立つとき，

$k+l=1, 3k+2l=2, kl=0$

これを解いて， $k=0, l=1$

よって，

$x^2+5xy+6y^2+x+2y=(x+2y)(x+3y+1)$

注 2行目から $x+2y$ をくくればすぐに因数分解できますが，この問題が $x^2+5xy+6y^2+x+2y-2=0$ と与えられた場合，左辺は因数分解できないので困ってしまいます。そのような場合でも解けるように解いています。

(2) $x^2+5xy+6y^2+x+2y=2$

(1)より

$(x+2y)(x+3y+1)=2$

x, y が整数のとき， $x+2y, x+3y+1$ は整数

$x+2y$	1	2	-1	-2
$x+3y+1$	2	1	-2	-1

よって，

$(x, y)=(1, 0), (6, -2), (3, -2), (-2, 0)$

確認問題1

$0<a<b$ である整数 a，b が $\dfrac{2}{m}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ を満たしているとする．

(1)　$m=9$ のとき，a，b の値を求めよ．

(2)　m が 3 以上の素数であるとき，a，b を m を用いて表せ．

解説

(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{9}$

両辺に $9ab$ をかけて，

$2ab-9a-9b=0$

$4ab-18a-18b=0$

$(2a-9)(2b-9)=81$

a, b は整数であるから，　$2a-9, 2b-9$ は整数である

$0<a<b$ であるから，　$-9<2a-9<2b-9$ より，

$2a-9$	1	3
$2b-9$	81	27

よって，

$(a, b)=(5, 45), (6, 18)$　答

(2) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{m}$

両辺に mab をかけて，

$2ab-ma-mb=0$

$4ab-2ma-2mb=0$

$(2a-m)(2b-m)=m^2$

a, b は整数であるから，　$2a-m, 2b-m$ は整数である

$0<a<b$ であるから，　$-m<2a-m<2b-m$ より，

$2a-m$	1
$2b-m$	m^2

よって，

$(a, b)=\left(\dfrac{m+1}{2}, \dfrac{m(m+1)}{2}\right)$　答

確認問題2

(1)　p，qを整数とする。このとき，$p-q$が奇数であることと，$p+q$が奇数であることは同値であることを証明せよ。

(2)　$p^2-q^2=100$ を満たす整数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

(3)　$p^2-q^2=250$ を満たす整数の組 $(p,\ q)$ の個数を求めよ。

(4)　$p^2-q^2=210000$ を満たす整数の組 $(p,\ q)$ の個数を求めよ。

解説

(1) $(p+q)-(p-q)=2q$

qは整数であるから，$2q$ は 2 の倍数より

$p-q$ を 2 で割った余りと，$p+q$ を 2 で割った余りは等しい

よって，$p-q$ が奇数であることと，$p+q$ が奇数であることは同値である　終

(2) $(p+q)(p-q)=2^2\cdot5^2$ より，

$p+q$ または $p-q$ は偶数であり，$p+q$ と $p-q$ の偶奇は一致するから，

$p+q$ と $p-q$ はともに偶数より，

$p+q$	2	10	50	-2	-10	-50
$p-q$	50	10	2	-50	-10	-2

よって，

$(p,q)=(26,-24),(10,0),(26,24),(-26,24),(-10,0),(-26,-24)$　答

(3) $(p+q)(p-q)=2\cdot5^3$ より，

$p+q$ または $p-q$ は偶数であり，$p+q$ と $p-q$ の偶奇は一致するから，

$p-q$ と $p+q$ はともに偶数である

このとき，$(p-q)(p+q)$ は 4 の倍数であるが，

右辺は 4 の倍数ではないから，$p^2-q^2=250$ を満たす整数の組 $(p,\ q)$ は存在しない，すなわち，0 個　答

(4) $(p+q)(p-q)=2^4\cdot3\cdot5^4\cdot7$ より，

$p+q$ または $p-q$ は偶数であり，$p+q$ と $p-q$ の偶奇は一致するから，

$p+q$ と $p-q$ はともに偶数より，

$p+q=2m$，$p-q=2n$ (m,n は整数)

とおける

このとき，$2m\cdot2n=2^4\cdot3\cdot5^4\cdot7$　$\therefore mn=2^2\cdot3\cdot5^4\cdot7$

m は $2^2\cdot3\cdot5^4\cdot7$ の約数であり，正負の場合を考えて，その個数は

$(2+1)(1+1)(4+1)(1+1)\times2=120$ (個)

これらの m に対して，n がそれぞれ 1 つ定まる

$p+q=2m$，$p-q=2n$ より

$p=m+n$，$q=m-n$ であるから，

m の個数と $(p,\ q)$ の組の個数は一致する

よって，求める整数の組 $(p,\ q)$ の個数は，120 個　答

確認問題3

(1) $6x^2+xy-2y^2$ を因数分解せよ．

(2) $6x^2+xy-2y^2-5x+6y+k$ が x, y の 1 次式の積に因数分解されるように，定数 k の値を定めよ．

(3) $6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$を満たす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ．

(解説)

(1) $6x^2+xy-2y^2=(2x-y)(3x+2y)$　答

(2) $6x^2+xy-2y^2-5x+6y+k$

$=(2x-y)(3x+2y)-5x+6y+k$

$=\{(2x-y)+m\}\{(3x+2y)+n\}$ とおく

これを展開すると

$(2x-y)(3x+2y)+m(3x+2y)+n(2x-y)+mn$

$=(2x-y)(3x+2y)+(3m+2n)x+(2m-n)y+mn$

これが任意の x, y で成り立つとき，

$3m+2n=-5, 2m-n=6, mn=k$

$\therefore\ m=1, n=-4, k=-4$　答

別解 x の 2 次方程式とみて解の公式を利用し，ルート内が完全平方式であることが必要として kを求めてもよい

(3) $6x^2+xy-2y^2-5x+6y-20=0$

$(2x-y+1)(3x+2y-4)=16$

x, y が自然数のとき，$2x-y+1, 3x+2y-4$ は整数である

$x, y\geqq 1$ であるから，$3x+2y-4\geqq 1$ より

$2x-y+1$	1	2	4	8	16
$3x+2y-4$	16	8	4	2	1

よって，

$(x, y)=(2, 3), (2, 1)$　答