高3数学α　数学Ⅲスタ演　10.無限級数

$\boxed{1}$ [2002 防衛大学校]

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}}\{1+(-1)^{n-1}\}$ の和を求めよ.

$\boxed{2}$ [2012 津田塾大]

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を $a_n=\dfrac{n}{2^n}$ とする。

(1) $n\geqq 3$ に対して，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\leqq\dfrac{3}{4}$ であることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(3) $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2^n}$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

$\boxed{3}$ [2016 大分大]

0 でない実数 r が $|r|<1$ を満たすとき，次の問いに答えよ。ただし，自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(n-1)r^n=0$ である。

(1) $R_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}r^k$ と $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kr^{k-1}$ を求めよ。

(2) $T_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)r^{k-2}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}k^2r^k$ を求めよ。

$\boxed{4}$ [2008 津田塾大]

(1) m を自然数とする。$\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\frac{1}{2}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}<1$ を示せ。

$\boxed{5}$［2016 奈良女子大］

数列 $\{S_n\}$，$\{T_n\}$ の一般項がそれぞれ

$$S_n=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}$$

$$T_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

で表されているとする。

(1)　正の整数 n に対して

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

が成り立つことを用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{4}$ を示せ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。不等式 $S_n<1+T_{n-1}$ を示せ。

(3)　数列 $\{S_n\}$ は収束することがわかっている。その極限値を S とするとき，不等式 $\dfrac{9}{8}\leqq S\leqq\dfrac{5}{4}$ を示せ。

$\boxed{6}$［2003 東京都立科学技術大］

数列 $\{a_n\}$：$\dfrac{3}{1\cdot2\cdot2^1}$，$\dfrac{4}{2\cdot3\cdot2^2}$，$\dfrac{5}{3\cdot4\cdot2^3}$，$\dfrac{6}{4\cdot5\cdot2^4}$，$\cdots\cdots$ について，以下の問いに答えよ.

(1)　一般項 a_n を n の式で表せ.

(2)　$2^n a_n=\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{n+1}$ を満足する定数 b，c を求めよ.

(3)　初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n および極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ.

$\boxed{7}$［2000 大阪女子大］

自然数 n に対して

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$$

とおくとき，次の問いに答えよ.

(1)　$\dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n+1}+\dfrac{1}{n+3}\right)$ を示せ.

(2)　部分和 S_n を求めよ.

(3)　無限級数

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+3)}+\cdots\cdots$$

の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めよ.

$\boxed{8}$ [2002 島根大]

1辺の長さが a の正三角形 T_1 の頂点を A_1，B_1，C_1 とする．t を正の実数とするとき，辺 A_1B_1，B_1C_1，C_1A_1 を $t:1$ に内分する点をそれぞれ A_2，B_2，C_2 とし，3点 A_2，B_2，C_2 を結んで正三角形 T_2 を作る．以下同様に正三角形 T_3，T_4，T_5，…… を作る．

(1)　T_2 の1辺の長さを求めよ．

(2)　正三角形 T_1，T_2，T_3，…… の面積の総和 $S(t)$ を求めよ．

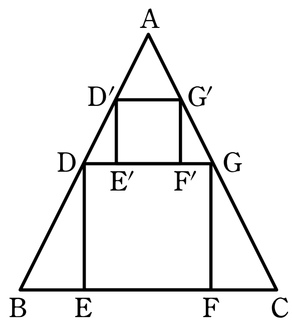
(3)　$S(t)$ の最小値を求めよ．

$\boxed{9}$ [2005 近畿大]

半径1の円 C_1 に内接する正三角形を T_1 とし，T_1 に内接する円を C_2，円 C_2 に内接する正三角形を T_2，以下同様にして，円 C_n に内接する正三角形を T_n とすると，C_n の半径は $^{ア}\boxed{}$，T_n の1辺の長さは $^{イ}\boxed{}$ である。したがって，円 C_1，C_2，C_3，…… の面積の総和は $^{ウ}\boxed{}$，円周の総和は $^{エ}\boxed{}$ であり，正三角形 T_1，T_2，T_3，…… の面積の総和は $^{オ}\boxed{}$ である。

$\boxed{10}$ [1997 お茶の水女子大]

二等辺三角形 ABC に図のように正方形 DEFG が内接している．$AB=AC=a$, $BC=2$ として，



(1)　正方形 DEFG の面積 S_1 を求めよ．

(2)　二等辺三角形 ADG に内接する正方形 D′E′F′G′ の面積を S_2，二等辺三角形 AD′G′ に内接する正方形の面積を S_3，以下同様に正方形を作っていき，その面積を S_4, S_5, …… とする．このとき，無限級数 $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+\cdots\cdots$ の和 S_∞ を求めよ．

(3)　三角形 ABC の面積を S とするとき，$S=2S_\infty$ となるのは三角形 ABC がどんな三角形のときか．