高3数学β　2017スタンダード演習　10.等式・不等式の証明

$\boxed{1}$ [1998 立命館大]

$\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{y+z}{6}=\dfrac{z+x}{5}\neq 0$ のとき，$x:y:z=3:$ ア $\boxed{}$ $:$ イ $\boxed{}$ であり，

$\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=$ ウ $\boxed{}$ である．

$\boxed{2}$ [1997 松山大]

a, b, c を 0 でない実数とし，$\dfrac{a+b+c}{a}=\dfrac{a+b+c}{b}=\dfrac{a+b+c}{c}$ のとき，

$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$ の値を求めよ．

$\boxed{3}$ [1996 学習院大]

正の数 a, b, c に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

(1)　$\dfrac{2ab}{a+b}\leqq\dfrac{a+b}{2}$

(2)　$2\left(\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}\right)\leqq a+b+c$

$\boxed{4}$ [2008 大阪市立大]

(1)　実数 x，y に対し $(1+x)(1+y)\leqq\left(1+\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ を示せ。また，等号が成立するのはどのようなときか。

(2)　a，b，c，d を -1 以上の数とするとき

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\leqq\left(1+\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$$

を示せ。また，等号が成立するのはどのようなときか。

$\boxed{5}$ [2005 同志社女子大]

x，y を正の数とするとき，$(3x+2y)\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}\right)$ がとりうる値の最小値を求めよ。

$\boxed{6}$［2002 東海大］

(1)　a，b を正の定数とする．$x>0$ の範囲で，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}$ の最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

(2)　$x>0$，$y>0$，$z>0$ の範囲で，$\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{1}{z}$ の最小値を求めよ．また，そのときの x，y，z の値を求めよ．

$\boxed{7}$［2003 慶応義塾大］

b_1，b_2，b_3 を正の実数とする．$a_1=b_1{}^3$，$a_2=b_2{}^3$，$a_3=b_3{}^3$ とするとき

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}-\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=\frac{1}{{}^{ア}\boxed{}}(b_1+b_2+b_3)\{(b_1-b_2)^2+(b_2-b_3)^2+(b_3-b_1)^2\}$$

となる．したがって，$\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ であり，等号は $a_1=a_2=a_3$ のときに限り成立する．この不等式を用いれば，正の実数 a，b に対して，

$4(a^2+ab)^3\geqq 3^3(a^2b)^{{}^{イ}\boxed{}}$ が得られる．

底面が半径 a の円，高さが b の直円柱を考える．不等式の等号成立条件から，表面積を一定にして体積を最大にしたとき，$b={}^{ウ}\boxed{}a$ である．

$\boxed{8}$［1998 西南学院大］

x, y, z が $x+2y+3z=6$ を満たすとき，$x^2+4y^2+9z^2$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ．

$\boxed{9}$［2007 早稲田大］

実数 x，y，z の間に $x+2y+3z=7$ という関係があるとき，$x^2+y^2+z^2$ は

$x=\dfrac{y}{{}^{ア}\boxed{}}=\dfrac{z}{{}^{イ}\boxed{}}$ のとき最小値 ${}^{ウ}\boxed{}$ をとる。

$\boxed{10}$［1998 九州大］

(1)　$x\geqq y\geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x}\geqq\dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ．

(2)　(ア)　不等式　$\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|}\geqq\dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ．

(イ)　(ア)の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ．