A，B，C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で 1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　$k$ 試合目で優勝チームが決まらない場合は，$k$ 試合目の勝者と，$k$ 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで $k$ は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　$n$ を 2 以上の整数とする。ちょうど $n$ 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　$m$ を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

(16　東京大)

解説

(1) 対戦が続くとき，勝者が毎回変わるから

$A_B \to C_A \to B_C \to A_B \to \cdots$

$B_A \to C_B \to A_C \to B_A \to \cdots$

が繰り返される。A が優勝するときは，
上の場合，どこかで $A_B \to A_C$，下の場合，どこかで $A_C \to A_B$ となればよいから
上の場合，$n=3k-1$ 試合目，下の場合，$n=3k+1$ 試合目( $k$ は自然数)で A が優勝する

よって，求める確率は

$n=3k-1$ のとき，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3k-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

$n=3k+1$ のとき，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3k+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

$n=3k$ のとき，0

すなわち，$k$ を自然数として

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ ( $n=3k-1, 3k+1$ のとき)，

0 ( $n=3k$ のとき)

(2) $A$ ：A が優勝する
$B$ ：A の最後の対戦相手が B である事象とする
求める確率は $P_A(B)$

(1)より

$$P(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^{5}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{6}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3\left\{1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^m\right\}}{1-\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}\right\}-\frac{1}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

$$=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$$

$A\cap B$ は最初に B が勝って A が優勝する場合であるから

$$P(A\cap B)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4\left\{1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^{m-1}\right\}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-3}\right\}$$

よって

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-3}\right\}}{\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}=\frac{8^m-8}{5\cdot 8^m-12}$$