A，B，C の 3 人が次のように勝負を繰り返す．1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める．2 回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める．この勝負を繰り返し，誰かが 2 連勝するか，または，100 回目の勝負を終えたとき，終了する．ただし，硬貨投げで勝つ確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である．

(1)　4 回以内の勝負で A が 2 連勝する確率を求めよ．

(2)　$n=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 100$ とする．n 回以内の勝負で，A，B，C のうち誰かが 2 連勝する確率を求めよ．

(01　北海道大)

解説

(1) A が 2 連勝して終了するのは

$A_B \to A_C$

$B_A \to C_B \to A_C \to A_B$

これらは排反であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}$$

(2) (n 回以内の勝負で誰かが 2 連勝して終わる)$=1-$(n 回の勝負で誰も 2 連勝しない)

n 回以内の勝負で誰も 2 連勝しないのは，毎回勝者が変わればよいから，

1 回目に A が勝つ場合と B が勝つ場合があるので，求める確率は

$$1-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$