

A, B, Cの3人が次のように勝負を繰り返す。1回目にはAとBの間で硬貨投げにより勝敗を決める。2回目以降には、直前の回の勝者と参加しなかった残りの1人との間で、やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負を繰り返し、誰かが2連勝するか、または、4回目の勝負を終えたとき、終了する。ただし、硬貨投げで勝つ確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。

- (1) A, B, Cのうちの誰かが2連勝して終了する確率を求めよ。
- (2) Aが2連勝して終了する確率を求めよ。

(01 北海道大)

解説

(1) (誰かが2連勝して終了する) = 1 - (誰も2連勝しない)

誰も2連勝しないのは、毎回勝者が変わればよいから

$$A_B \rightarrow C_A \rightarrow B_C \rightarrow A_B \quad (\text{勝負})$$

$$B_A \rightarrow C_B \rightarrow A_C \rightarrow B_A$$

よって、求める確率は

$$1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{7}{8}$$

(2) Aが2連勝して終了するのは

$$A_B \rightarrow A_C$$

$$B_A \rightarrow C_B \rightarrow A_C \rightarrow A_B$$

これらは排反であるから、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

参考

同様にして、Bが2連勝して終了するのは $\frac{5}{16}$

Cが2連勝して終了するのは $\frac{7}{8} - 2 \cdot \frac{5}{16} = \frac{4}{16}$

であるから、3人の巴戦では、3人の実力が等しければ、初めに対戦した2人の方が有利である。