

A, B, C の 3 人が次のように勝負を繰り返す. 1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める. 2 回目以降には, 直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で, やはり硬貨投げにより勝敗を決める. この勝負を繰り返し, 誰かが 2 連勝するか, または, 4 回目の勝負を終えたとき, 終了する. ただし, 硬貨投げで勝つ確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である.

- (1) A, B, C のうちの誰かが 2 連勝して終了する確率を求めよ.
- (2) A が 2 連勝して終了する確率を求めよ.

(01 北海道大)

解説

- (1) (誰かが 2 連勝して終了する) = $1 - (\text{誰も 2 連勝しない})$

誰も 2 連勝しないのは, 毎回勝者が変わればよいから

$$A_B \rightarrow C_A \rightarrow B_C \rightarrow A_B \quad (\text{勝負})$$

$$B_A \rightarrow C_B \rightarrow A_C \rightarrow B_A$$

よって, 求める確率は

$$1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{7}{8}$$

- (2) A が 2 連勝して終了するのは

$$A_B \rightarrow A_C$$

$$B_A \rightarrow C_B \rightarrow A_C \rightarrow A_B$$

これらは排反であるから, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

参考

同様にして, B が 2 連勝して終了するのは $\frac{5}{16}$

C が 2 連勝して終了するのは $\frac{7}{8} - 2 \cdot \frac{5}{16} = \frac{4}{16}$

であるから, 3 人の巴戦では, 3 人の実力が等しければ, 初めに対戦した 2 人の方が有利である。