

漸化式演習 3.分數型

1 [広島県立大]

$a_1=3, a_{n+1}=\frac{4a_n-2}{a_n+1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) 方程式 $x=\frac{4x-2}{x+1}$ の解 α, β ($\alpha < \beta$) を求めよ。

(2) (1)の α, β に対して, $b_n=\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ によって定義される数列 $\{b_n\}$ が満たす漸化式を導き,

一般項 b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

2 [2003 電気通信大]

$a_1=7, a_{n+1}=\frac{7a_n+3}{a_n+5}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) $b_n=a_n-k$ とおくとき, $b_{n+1}=\frac{\alpha b_n}{b_n+\beta}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) となるような定数 k ,

α, β を求めよ。ただし $k > 0$ とする。

(2) $c_n=\frac{1}{b_n}$ とおく。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。更に、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3 [2010 東京理科大]

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=7, a_{n+1}=\frac{4a_n-9}{a_n-2}$, $n=1, 2, 3, \dots$ を満たす。

(1) すべての自然数 n に対し, $a_n > 3$ であることを示せ。

(2) 自然数 n に対し, $b_n=\frac{1}{a_n-3}$ とおく。 b_{n+1} と b_n との関係を求めよ。

(3) a_n を n で表せ。