

漸化式演習 3.分数型

1 [広島県立大]

$a_1=3, a_{n+1}=\frac{4a_n-2}{a_n+1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) 方程式 $x=\frac{4x-2}{x+1}$ の解 $\alpha, \beta (\alpha<\beta)$ を求めよ.

(2) (1)の α, β に対して, $b_n=\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ によって定義される数列 $\{b_n\}$ が満たす漸化式を導き, 一般項 b_n を求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

2 [2003 電気通信大]

$a_1=7, a_{n+1}=\frac{7a_n+3}{a_n+5} (n=1, 2, 3, \dots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) $b_n=a_n-k$ とおくと, $b_{n+1}=\frac{\alpha b_n}{b_n+\beta} (n=1, 2, 3, \dots)$ となるような定数 k, α, β を求めよ. ただし $k>0$ とする.

(2) $c_n=\frac{1}{b_n}$ とおく. 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ. 更に, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

3 [2010 東京理科大]

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=7, a_{n+1}=\frac{4a_n-9}{a_n-2}, n=1, 2, 3, \dots$ を満たす.

(1) すべての自然数 n に対し, $a_n>3$ であることを示せ.

(2) 自然数 n に対し, $b_n=\frac{1}{a_n-3}$ とおく. b_{n+1} と b_n との関係を求めよ.

(3) a_n を n で表せ.