x 軸上を動く点 A があり，最初は原点にある．硬貨を投げて表が出たら正の方向に 1 だけ進み，裏が出たら負の方向に 1 だけ進む．硬貨を 6 回投げるものとして，以下の確率を求めよ．

(1)　硬貨を 6 回投げたときに，点 A が原点に戻る確率

(2)　硬貨を 6 回投げたとき，点 A が 2 回目に原点に戻り，かつ 6 回目に原点に戻る確率

(3)　硬貨を 6 回投げたとき，点 A が初めて原点に戻る確率

(98　埼玉大)

解説

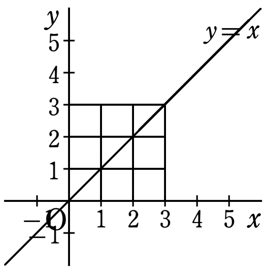
(1) 6 回中表が 3 回，裏が 3 回出ればよいから

$$ {}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{2^6}=\frac{5}{16} $$

(2) 最初の 2 回で表が 1 回，裏が 1 回出て，
残りの 4 回で表が 2 回，裏が 2 回出ればよいから

$$ {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{2\cdot 6}{2^6}=\frac{3}{16} $$

(3) x を表の回数，y を裏の回数として，
硬貨を 6 回投げたとき，点 A が初めて原点に戻るのは
$y=x$ となるとき，原点に戻ることに注意して，
O をスタートして，$y=x$ に触れずに $(3, 3)$ に来る最短経路
を考えればよいから，図より 4 通り



1 つ 1 つの経路をたどる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ であるから，求める確率は

$$ 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{16} $$

別解 初めの問題のように解いてもよい。

点 A が原点に戻るのは，2 回目，4 回目，6 回目のいずれかである

A ：6 回目に原点に戻る

B ：2 回目に原点に戻る

C ：4 回目に原点に戻る　事象とし

$B, C\subset A$ とする

$$ \begin{aligned} P(\overline{B}\cap\overline{C})&=P(A)-P(\overline{\overline{B}\cap\overline{C}}) \\ &=P(A)-P(B\cup C) \end{aligned} $$

ここで，

$$ \begin{aligned} P(B\cup C)&=P(B)+P(C)-P(B\cap C) \\ &=\frac{3}{16}\times 2-{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \end{aligned} $$

よって，求める確率は

$$ P(\overline{B}\cap\overline{C})=\frac{5}{16}-\frac{1}{4}=\frac{1}{16} $$