

高3数学Ⅱ 数学Ⅲスタ演 1.複素数と計算

1 [2003 小樽商科大]

$|z| = \sqrt{5}$, $z + \overline{z} = 2$ であるような複素数 z を求めよ.

2 [2001 中央大]

a が実数のとき, 2 次方程式 $x^2 - ax + 1 = 0$ が絶対値 1 の複素数を解としてもつような a の範囲を求めよ.

3 [1996 神戸大]

複素数 α, β について, $|\alpha| = |\beta| = 2$, $\alpha + \beta + 2 = 0$ であるとき, 次の値を求めよ.

- (1) $\alpha\beta$
- (2) $\alpha^3 + \beta^3 + 8$

4 [2003 自治医科大]

複素数 α, β が $|\alpha| = |\beta| = |\alpha - \beta| = 1$ を満たすとき, $|2\beta - \alpha|, \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$ の値を求めよ.

5 [1996 横浜市立大]

複素数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ および $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = |\delta| = 1$ を満たすとき, $|\alpha - \beta|^2 + |\alpha - \gamma|^2 + |\alpha - \delta|^2$ の値を求めよ.

6 [2000 学習院大]

絶対値が 1 より小さい複素数 α, β に対して不等式 $\left|\frac{\alpha - \beta}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right| < 1$ が成り立つことを示せ. ただし, $\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数を表す.

7 [1999 東京女子大]

z は複素数で, $z^2 + iz$ と z^3 はともに実数である. このような z をすべて求めよ.

高3数学α 数学Ⅲスタ演 1.複素数と計算

8 [1996 一橋大]

$z + \frac{4}{z}$ が実数であり、かつ $|z - 2| = 2$ であるような複素数 z を求めよ.

9 [2002 関西学院大]

複素数 z が $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ を満たすとき、 z の絶対値と偏角を求めよ. ただし、偏角は 0° と 360° の間とする.

10 [1998 滋賀大]

方程式 $z^2 = -i$ を解け. ただし、 i は虚数単位である.

11 [1998 琉球大]

$z^4 = 8(1 + \sqrt{3}i)$ を満たす複素数 z は 4 つある. これら 4 つの複素数を求めよ.

12 [1999 学習院大]

$z^3 = -\bar{z}$ を満たす複素数 z をすべて求め、複素数平面上に図示せよ. ただし、 \bar{z} は z の共役複素数を表す.

13 [1999 京都教育大]

$\alpha = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ とする.

- (1) $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ を示せ.
- (2) $u = \alpha + \alpha^4$, $v = \alpha^2 + \alpha^3$ とおくとき、 $u + v$ と uv の値を求めよ.
- (3) $\cos 72^\circ$ の値を求めよ.

14 [1998 小樽商科大]

$\theta = \frac{360^\circ}{7}$, $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$, $\beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ のとき

- (1) $\bar{\alpha} = \alpha^6$ を示せ.
- (2) $\beta + \bar{\beta}$, $\beta \bar{\beta}$ を求めよ.
- (3) $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$ を求めよ.

高3数学α 数学Ⅲスタ演 1.複素数と計算

15 [2018 早稲田大]

複素数 z は $z^7=1$ かつ $z \neq 1$ を満たす。 z の偏角を θ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ は $\frac{\sqrt{\quad}}{\quad}$ である。

(2) $\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta$ は $\frac{\sqrt{\quad}}{\quad}$ である。

16 [2002 龍谷大]

n を 3 以上の自然数とし、 $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ とする。 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ を考える。

(1) $\sum_{k=1}^n z^k$ を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^n \cos k\theta$ を求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^n \cos^2 k\theta$ を n で表せ。

17 [2016 芝浦工業大]

複素数 α を

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

とする。ただし、 i は虚数単位とする。

(1) $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$ の値を求めよ。

(2) 複素数 z について

$$(z - \alpha)(z - \alpha^2)(z - \alpha^3)(z - \alpha^4) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$$

が成り立つことを示せ。

(3) 自然数 n について、 $|1 - \alpha^n|^2$ の値を $\sin \frac{n\pi}{5}$ を用いて表せ。

(4) $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。

高3数学α 数学Ⅲスタ演 1.複素数と計算

18 [1998 龍谷大]

複素数 z を $z = \cos \frac{360^\circ}{n} + i \sin \frac{360^\circ}{n}$ とおく. ただし, n は 2 以上の自然数である.

(1) z^n の値を求めよ.

(2) $\frac{1}{1-z^k} + \frac{1}{1-z^{n-k}}$ の値を求めよ. ただし, k は $1 \leq k \leq n-1$ の範囲の自然数である.

(3) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-z^k}$ の値を求めよ.

19 [2004 日本女子大]

複素数 $\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ について, α^n が正の実数となるような最小の正の整数 n を求めよ.

20 [2016 九州大]

等式 $(i - \sqrt{3})^m = (1 + i)^n$ を満たす自然数 m, n のうち, m が最小となるとき m, n の値を求めよ. ただし, i は虚数単位である.