微分の計算　5.いろいろな導関数

$\boxed{1}$

(1) $x=t-1,\ y=t^2-4t+3$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t で表せ.

(2) $x=\cos t,\ y=\sin t$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t で表せ.

(3) $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を $x,\ y$ で表せ.

$\boxed{2}$ [(1) 2001 北見工業大　(2) 2009 同志社大　(3) 1996 信州大]

(1) $y=e^x\sin x$ とすると，$y''=\boxed{}$ である.

(2) $f(x)=e^{x^2}$ の第 2 次導関数は $f''(x)=\left({}^{ア}\boxed{}\right)e^{x^2}$ であり，第 4 次導関数は

$f^{(4)}(x)=\left({}^{イ}\boxed{}\right)e^{x^2}$ である。

(3) $\tan y=x$ が与えられたとき，$y=\dfrac{\pi}{4}$ での $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の値を求めよ.

$\boxed{3}$ [(2) 2004 法政大]

(1) $y=e^x\cos x$ のとき，$y''-2y'+2y$ を求めよ.

(2) $y=e^{-x}\sin x$ のとき，$y''+{}^{ア}\boxed{}\,y'+{}^{イ}\boxed{}\,y=0$ である.

$\boxed{4}$ [2009 東京理科大]

媒介変数表示 $x=1-\cos\theta$，$y=\theta-\sin\theta$ によって定められる x と y について，

$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を θ で表せ。

$\boxed{5}$

次の関数の第 n 次導関数を求めよ.

(1) $y=e^x+e^{-x}$　　(2) $y=\sin x$　　(3) $y=xe^x$

(4) $y=\log x$

$\boxed{6}$ [2004 横浜市立大]

(1) 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であることの定義を書け．

(2) $x=a$ で微分可能である関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して $h(x)=f(x)g(x)$ とおくとき，$h'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ が成り立つことを，(1) の定義を使って証明せよ．

(3) 何回でも微分可能である関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して $h(x)=f(x)g(x)$ とおくとき

$$h^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(a)\,g^{(k)}(a)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，$f^{(n)}(a)$ は関数 $f(x)$ の n 次導関数の $x=a$ での値で，$f^{(0)}(a)=f(a)$ とする．