硬貨を n 回投げるなかで表が連続して k 回以上出る確率を $P_{n,k}$ とする.

(1) $P_{3,2}$ および $P_{4,2}$ を求めよ.

(2) $n=k+1, \cdots\cdots, 2k$ に対して $P_{n,k}-P_{n-1,k}$ を求めよ.

(3) $P_{2k,k}$ を求めよ.

(97　名古屋大)

解説

(1) ○を表，×を裏，△をどちらでもよいとして，

$P_{3,2}$ は，○○△，×○○のいずれかであるから

$$P_{3,2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$$

$P_{4,2}$ は，○○△△，×○○△，△×○○のいずれかであるから

$$P_{4,2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$$

(2) $P_{n,k}$ は $P_{n-1,k}$ に

　$P_{n-1,k}$ のすべての場合の最後に△を加えたものと

　△を $n-k-1$ 回，×を 1 回，○を k 回

のパターンを加えたものであるから

$$P_{n,k}=P_{n-1,k}+\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$\therefore\ P_{n,k}-P_{n-1,k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

(3) $P_{n,k}-P_{n-1,k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

に $n=k+1, k+2, \cdots, 2k$ を代入してすべて加えると

$$P_{2k,k}-P_{k,k}=k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$P_{k,k}=\left(\frac{1}{2}\right)^k$ より

$$P_{2k,k}=(k+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

別解

$P_{2k,k}$ は

　○ k 個 △ k 個

　×○ k 個 △ $k-1$ 個

　△×○ k 個 △ $k-2$ 個

　…

　△ $k-1$ 個 ×○ k 個

のいずれかであるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k}+k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=(k+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$