1 枚の硬貨を投げて，A 君と B 君が次のようなゲームを行う．ゲーム開始時における A 君，B 君の得点はともに 0 点とする．毎回の硬貨投げの試行で表が出たとき A 君の勝ち，裏が出たとき B 君の勝ちとし，勝った方に $+1$ 点，負けた方に -1 点がそれまでの得点に加えられるとする．各試行は独立としてこの試行を続けたとき，次の問いに答えよ．ただし，硬貨の表と裏の出る確率は，ともに $\frac{1}{2}$ である．また，n と m はともに 1 以上の整数とする．

(1)　3 回の試行の後，A 君の得点が 1 点である場合の数を求めよ．

(2)　$2n$ 回の試行の後，A 君の得点が $2m$ 点である場合の数を求めよ．

(3)　$2n$ 回の試行の後，A 君の得点が $2m$ 点とする．試行開始後 A 君の得点が常に B 君の得点より多い確率を求めよ．

(96　北海道大)

解説

(1) 表が x 回，裏が y 回出たとすると

$x+y=3,\ x-y=1\quad \therefore\ x=2,\ y=1$

3 回の試行で表が 2 回，裏が 1 回出ればよいから

${}_3\mathrm{C}_1=3$

(2) 表が x 回，裏が y 回出たとすると

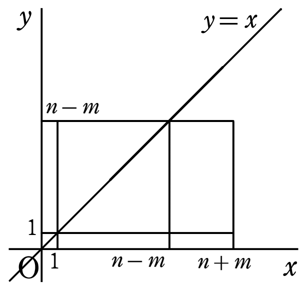
$x+y=2n,\ x-y=2m\quad \therefore\ x=n+m,\ y=n-m$

$2n$ 回の試行で表が $(n+m)$ 回，裏が $(n-m)$ 回出ればよいから

$${}_{2n}\mathrm{C}_{n+m}=\frac{(2n)!}{(n+m)!(n-m)!}$$

(3) 硬貨を $2n$ 回投げたとき， A が $2m$ 点になる条件のもと A 君の得点が常に B 君の得点より多くなるのは $y=x$ となるとき，A 君の得点と B 君の得点が等しくなることに注意して，

O をスタートして 1 回目は表が出て，$(1, 0)$ から $y=x$ に触れずに $(n+m, n-m)$ に来る最短経路を考えればよい。



その経路の個数は，$(1, 0)$ から $(n+m, n-m)$ への最短経路の個数から $(1, 0)$ からスタートして $y=x$ に触れる経路を除けばよい

$(1, 0)$ からスタートして $y=x$ に触れる経路の個数は，

これらの経路を， $(0, 1)$ から $(n+m, n-m)$ への経路において，$(0, 1)$ からスタートして初めて $y=x$ に触れた部分を $y=x$ に関して折り返したものと考えると，$(0, 1)$ からスタートして $(n+m, n-m)$ への最短経路の個数に等しい ($(0, 1)$ から $(n+m, n-m)$ への経路は必ず $y=x$ に触れる)

よって，$(1, 0)$ から $y=x$ に触れずに $(n+m, n-m)$ に来る最短経路の個数は

$$\frac{(2n-1)!}{(n+m-1)!(n-m)}-\frac{(2n-1)!}{(n+m)!(n-m-1)!}=\frac{2m\cdot(2n-1)!}{(n+m)!(n-m)!}$$

以上より，求める確率は

$$\frac{\dfrac{2m\cdot(2n-1)!}{(n+m)!(n-m)!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}}{\dfrac{(2n)!}{(n+m)!(n-m)!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}}=\frac{m}{n}$$

$\boxed{\text{別解}}$

場合の数で考えてもよい。全体をA君が $2m$ 点となる場合の数として，これは(2)で求めたものであり，これらの $\dfrac{(2n)!}{(n+m)!(n-m)!}$ 通りはすべて同様に確からしいから，求める確率は

$$\frac{\dfrac{2m\cdot(2n-1)!}{(n+m)!(n-m)!}}{\dfrac{(2n)!}{(n+m)!(n-m)!}}=\frac{m}{n}$$