A，B，C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

(16　東京大)

解説

(1) ちょうど 5 試合で A が優勝するのは

$A_B \to C_A \to B_C \to A_B \to A_C$

よって

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

(2) 対戦が続くとき，勝者が毎回変わるから

$A_B \to C_A \to B_C \to A_B \to \cdots$

$B_A \to C_B \to A_C \to B_A \to \cdots$

が繰り返される。A が優勝するときは，

上の場合，どこかで $A_B \to A_C$，下の場合，どこかで $A_C \to A_B$ となればよいから

上の場合， $n=3k-1$ 試合目，下の場合， $n=3k+1$ 試合目(k は自然数)で A が優勝する

よって，求める確率は

$n=3k-1$ のとき， $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3k-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$n=3k+1$ のとき， $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3k+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$n=3k$ のとき， 0

すなわち， k を自然数として

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ($n=3k-1, 3k+1$ のとき),

0 ($n=3k$ のとき)

(3) (2)より

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3\left\{1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^m\right\}}{1-\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}\right\}-\frac{1}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

$$=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$$