袋の中に白球，赤球，黒球が 1 個ずつ入っている．袋から無作為に球を 1 個取り出し，白球なら A の勝ち，黒球なら B の勝ち，赤球なら引き分けとする．取り出した球をもとに戻し，このゲームを繰り返す．A, B のうち，先に 3 回ゲームに勝った方を優勝とする．

(1)　5 回目のゲームで A の優勝が決定する確率を求めよ．

(2)　6 回目のゲームで A の優勝が決定する確率を求めよ．

(3)　引き分けが 1 回も起こらずに A の優勝が決定する確率を求めよ．

(97　山形大)

解説

(1) 1 回目から 4 回目までで A が 2 勝して，5 回目で A が勝てばよい

1 回目から 4 回目で A が 2 勝して，あとは負けでも引き分けでもよいから

$${}_4\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$$

(2) 1 回目から 5 回目までで A が 2 勝 3 分け，2 勝 1 敗 2 分け，2 勝 2 敗 1 分けのいずれかで，6 回目で A が勝てばよいから

$$\left({}_5\mathrm{C}_2+\frac{5!}{2!2!}\cdot 2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\frac{1}{3}=\frac{70}{729}$$

(3) A が優勝するのは 3 回目，4 回目，5 回目のいずれかであり，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+{}_4\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{2}{81}=\frac{8}{81}$$