漸化式演習　5.連立漸化式

$\boxed{1}$ [1997 慶応義塾大]

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は次の条件を満たしている．

$a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{5}{4}a_n-\dfrac{3}{4}b_n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

$b_1=0, b_{n+1}=-\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{5}{4}b_n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

このとき，一般項 a_n, b_n は $a_n=\overset{\text{ア}}{\boxed{}}+\dfrac{1}{\overset{\text{イ}}{\boxed{}}}\times 2^n-\overset{\text{ウ}}{\boxed{}}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,

$b_n=\overset{\text{エ}}{\boxed{}}-\dfrac{1}{\overset{\text{オ}}{\boxed{}}}\times 2^n-\overset{\text{カ}}{\boxed{}}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ となる．

$\boxed{2}$ [1996 東北大]

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が漸化式 $a_{n+1}=a_n-4b_n+1, b_{n+1}=2a_n-5b_n-1$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定義されている．ただし，$a_1=1, b_1=0$ とする．

(1)　a_n-b_n を求めよ．

(2)　a_n, b_n を求めよ．

$\boxed{3}$ [2012 鳥取大]

次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2b_n+n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$
$$b_1=1,\ b_{n+1}=-a_n+2b_n+2n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$c_n=a_n+2b_n$ で定義される数列 $\{c_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。

(2)　数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を求めよ。

(3)　数列 $\{c_n\}$ の第 n 項が 2 桁の整数となる n の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ [2002 三重大]

$a_1=1$，$b_1=3$，$a_{n+1}=3a_n+b_n$，$b_{n+1}=2a_n+4b_n$ で定められている数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある．

(1)　$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ を満たす α，β の組を 2 組求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　b_n が a_n の x 倍 (x は正の整数) よりも常に大きくなるとき，x の最大値を求めよ．

漸化式演習　5.連立漸化式

$\boxed{5}$ [2005 早稲田大]

次の条件によって定められる数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を考える。

$x_1=1$，$y_1=5$，$x_{n+1}=x_n+y_n$，$y_{n+1}=5x_n+y_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(1)　x_n および y_n をそれぞれ5で割ったときの余りを求めよ。

(2)　$a_n=x_n+cy_n$ とおいたとき，数列 $\{a_n\}$ が等比数列となるように定数 c の値を定め，a_n を n の式で表せ。

(3)　x_n および y_n を n の式で表せ。

$\boxed{6}$ [三重大]

正の整数 n に対して，

(1) $(2+\sqrt{3})^n$ を $a_n+b_n\sqrt{3}$ (a_n, b_n は正の整数) と表すとき，$(2-\sqrt{3})^n$ が $a_n-b_n\sqrt{3}$ と表されることを示せ.

(2) またこのとき，${a_n}^2-1$ が3の倍数であることを示せ.

(3) $(2+\sqrt{3})^n$ は，ある正の整数 A に対して $\sqrt{A}+\sqrt{A+1}$ の形をしていることを示せ

$\boxed{7}$ [広島大]

自然数 n に対して，有理数 a_n, b_n を $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n=\dfrac{a_n+b_n\sqrt{5}}{2}$ によって定める.

(1) a_{n+1} および b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ.

(2) a_n, b_n は正の整数で，ともに偶数またはともに奇数であることを数学的帰納法によって証明せよ.